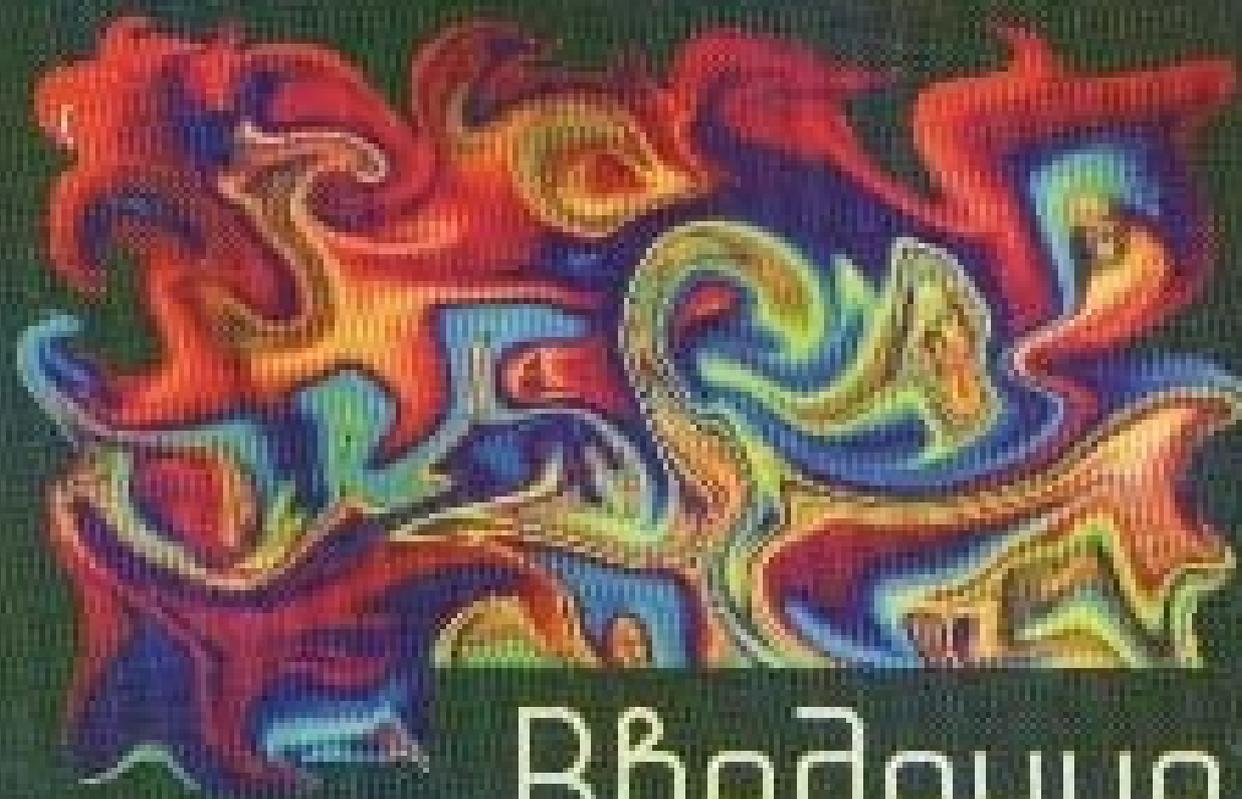


Л.Г. Генин
В.Г. Свиридов



Введение в статистическую теорию турбулентности

учебное пособие для вузов

Л. Г. ГЕНИН, В. Г. СВИРИДОВ

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Турбулентная форма движения жидкостей и газов несравненно более распространена в природе и технике по сравнению с ламинарной. В частности, подавляющее большинство течений в энергетических установках является турбулентным. Турбулентные течения характеризуются гораздо более интенсивным переносом тепла, вещества и количества движения. Поэтому в большинстве технических устройств выгодно иметь турбулентный режим течения.

Турбулентность – очень сложное физическое явление и несмотря на большое число теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию турбулентности, достаточно полный обзор которых можно найти в монографиях [1-3], эта проблема изучена еще недостаточно. Даже определение самого понятия турбулентность вызывает некоторые затруднения. Обычно, определяя понятие турбулентного движения жидкости, говорят, что это такое движение, при котором в потоке существуют нерегулярные случайные пульсации скорости и давления, перемешивающие поток и обуславливающие молярный механизм взаимодействия между ее элементами, т.е. в отличие от ламинарного режима течения подчеркивается неупорядоченный характер изменения параметров потока. Однако, если бы турбулентное течение было полностью неупорядоченным, то оно не поддавалось бы математическому анализу. На самом деле неупорядоченность турбулентного движения относительна и связана с влиянием на поток некоторых не поддающихся точному учету факторов. Поэтому реализация того или иного значения параметра в турбулентном потоке носит вероятностный характер.

Основные трудности при исследовании турбулентности связаны с наличием большого числа степеней свободы, сильным нелинейным взаимодействием между ними, сложным характером движения. Поэтому «единственно возможным в теории турбулентности представляется статистическое описание, опирающееся на изучение специфических статистических закономерностей, присущих большим совокупностям однотипных объектов. Таким образом, теорией турбулентности может быть лишь статистическая гидромеханика, изучающая статистические свойства ансамблей течения жидкостей или газов, находящихся в макроскопически одинаковых условиях» [1].

В настоящее время имеется ряд неплохих (хороших) книг, посвященных изложению статистической теории турбулентности. Непревзойденным, по нашему мнению, является двухтомник А.С.Монина и А.М.Яглома «Статистическая гидромеханика» [1,2]. Весьма полезной также является книга И.О.Хинце «Турбулентность». Однако, эта литература рассчитана на хорошо подготовленного читателя. Наш собственный опыт работы в этой области свидетельствует о том, что необходима литература, в которой основы статистической теории турбулентности излагались бы на достаточно хорошем теоретическом уровне, но в более доступной для широкого круга научных работников форме. Именно эту нишу мы пытаемся заполнить своей монографией.

При написании монографии авторы стремились ознакомить читателя с «азами» статистической теории турбулентности, с основными понятиями и специфичным математическим аппаратом статистической гидромеханики, подготовить заинтересованного читателя к работе с более серьезной литературой по статистической теории турбулентности.

В первых двух главах монографии представлен общепринятый вероятностный подход, в соответствии с которым турбулентность рассматривается как случайная функция времени и пространственных координат. Этот подход позволяет ввести и применить понятия и математический аппарат корреляционного и спектрального анализа - основной аппарат теории случайных функций. Желаящим изучить эти вопросы более подробно можно порекомендовать любую из книг [8—12], в которых современный уровень материала удачно сочетается с простотой изложения.

В третьей главе этот математический аппарат используется для рассмотрения собственно турбулентности. В отличие от большинства книг совсем не рассматривается теория устойчивости, поскольку, по нашему мнению, к этому вопросу следует обращаться после того, как изучена физика развитой турбулентности. Достаточно подробно анализируются закономерности пристенной реальной турбулентности. Привлечение уравнений баланса одноточечных корреляций позволяет рассмотреть процессы генерации, диссипации, переноса пульсационной энергии.

Так как эксперимент является основным методом исследования закономерностей турбулентных течений, то в монографию включена глава 4, посвященная описанию методов экспериментального оценивания статистических характеристик турбулентности и анализу специфических погрешностей при статистической обработке экспериментальных данных.

Отдельная 5 глава посвящена анализу процесса вырождения однородной турбулентности в магнитном поле.

Следует отметить, что материал в пособии дается в тензорном изложении, что совершенно необходимо, поскольку многие из рассматриваемых величин являются тензорами разных рангов. Кроме того, применения компактной тензорной записи выражений нельзя избежать, так как иначе многие формулы (особенно в гл. 3) выглядели бы невероятно громоздкими. Поэтому в Приложении приводятся краткие сведения об основных элементах тензорной алгебры.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

1.1. Определение турбулентности

В 1983 году научный мир отметил 100-летие с момента опубликования результатов опытов английского ученого Осборна Рейнольдса, положивших начало науке о турбулентности. Экспериментируя с потоком воды в стеклянной трубке, в которую через капилляр вводилась краска, О. Рейнольдс наблюдал существование двух режимов течения жидкости - ламинарного и турбулентного. При сравнительно небольших скоростях течения, соответствующих малым значениям безразмерного критерия Рейнольдса $Re = \bar{w}d/\nu$, жидкость движется ламинарно, т.е. упорядоченно, слои жидкости не перемешиваются, вследствие чего тонкая струйка краски сохраняется вдоль потока на большой длине.

Но если Re превысит некоторое критическое значение, для круглых труб равное приблизительно $Re_{кр} = 2 \cdot 10^3$, то картина течения кардинальным образом меняется: ламинарный режим течения сменяется турбулентным (по терминологии О. Рейнольдса — «извилистым»). При этом структура течения становится весьма сложной, моли жидкости интенсивно перемешиваются, о чем свидетельствует быстрое размывание струйки краски и равномерное окрашивание всего потока.

Казалось бы, не составляет труда дать определение турбулентности, отражающее наиболее существенные особенности этой формы движения жидкости. Однако практика показала, что данный вопрос нередко вызывает затруднения. Действительно, часто можно услышать высказывания типа: «Турбулентные течения - это такие течения, которые имеют сложную вихревую структуру». Такое определение турбулентности нельзя признать удачным, хотя может показаться, что оно вытекает из опыта О. Рейнольдса. Во-первых, существуют течения, имеющие весьма сложную структуру, которые, тем не менее, являются течениями ламинарными. Примером может служить хорошо известная «дорожка Кармана» в следе за обтекаемым телом, в которой отчетливо видны вихри Кармана. Во-вторых, на основании такого определения можно сделать совершенно неправильный вывод о том, что турбулентное течение является вихревым в отличие от ламинарного. Здесь налицо путаница в терминологии. Общеизвестно, что турбулентное течение представляет собой совокупность («иерархию») структурных образований различных размеров, именуемых «турбулентными молями» или «турбулентными вихрями». Однако термин «вихревое течение» в механике жидкости означает нечто совершенно иное, а именно движение жидкости, поле скорости \mathbf{u} которого подчиняется условию $\text{rot } \mathbf{u} \neq 0$. Нетрудно понять, что любое течение реальной жидкости, ламинарное или турбулентное, в котором проявляется молекулярная вязкость, является вихревым в обычном понимании этого термина, поскольку ротор скорости в этом случае

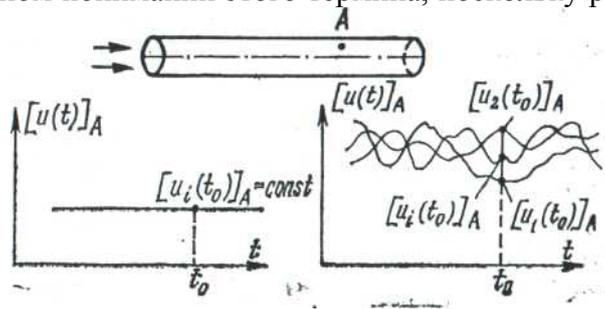


Рис. 1.1

отличен от нуля. Предлагаем читателю убедиться, например, что стабилизированное ламинарное течение в плоской щели является вихревым. В данном случае частички жидкости, двигаясь по прямолинейным траекториям, одновременно вращаются вокруг осей, проходящих через эти частички, благодаря наличию вязкости.

Каковы же наиболее существенные отличительные признаки турбулентного течения? Ответить на этот вопрос поможет следующий эксперимент. Представим себе некий экспериментальный стенд, например, круглую трубу, по которой движется жидкость (рис. 1.1). Полагаем, что можно с очень высокой точностью задавать идентичные режимные параметры

эксперимента: давление на входе и выходе, расход жидкости, температуру, свойства жидкости. Это означает, что с высокой степенью точности заданы начальные и граничные условия моделируемой в опыте задачи. Проведем какой-либо эксперимент, в ходе которого в трубе реализуется определенное поле скорости $u(x, t)$. При этом в произвольно выбранной точке A можно наблюдать реализацию процесса $[u(t)]_A$. Повторяя опыт N раз в строго идентичных условиях, можно получить N реализаций интересующего нас процесса $[u_i(t)]_A$, где $i = 1, 2, 3, \dots$. Сопоставление этих реализаций между собой позволяет понять принципиальную разницу между ламинарным и турбулентным течениями.

При ламинарном течении (рис.1.1.а) все реализации процесса $[u_i(t)]_A$ будут одинаковыми. Действительно, ламинарное течение полностью определяется задаваемыми начальными и граничными условиями, а они, как мы договорились, не изменяются от опыта к опыту. Правда, всегда существуют малые возмущения поля скорости, которые мы контролировать не можем. Причины этих малых возмущений могут быть различными: вибрации, нестабильности источника питания, состояние обтекаемых жидкостью поверхностей и т. д. Однако, как известно читателю, ламинарное течение устойчиво по отношению к малым возмущениям - они подавляются, диссипируют в ламинарном потоке под действием молекулярной вязкости.

Итак, все реализации ламинарного течения одинаковы. В частности, в стационарных условиях эти реализации в точке A выражаются формулой $[u_i(t)]_A = \text{const}$ и изображаются прямой на графике рис. 1.1.,а.

Теперь изменим параметры эксперимента так, чтобы течение в трубе стало турбулентным. Вновь проведем опыт N раз в идентичных условиях, чтобы получить N реализаций турбулентного поля скорости. Убеждаемся (рис.1.1.б), что все реализации турбулентного течения различны! Причина различий заключается в том, что задаваемые нами режимные параметры, неизменные от опыта к опыту, в случае турбулентного течения не полностью определяют поле скорости, поскольку турбулентное течение неустойчиво к малым возмущениям поля скорости. При течении вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами в отсутствие внешних массовых сил (в данном пособии рассматриваются только такие течения) критерием устойчивости потока к возмущениям является число Рейнольдса. Критерий Re может быть интерпретирован как соотношение характерных значений сил инерции и вязкости. Силы инерции, вызывающие перемешивание различных объемов жидкости, движущихся с разными скоростями, способствуют образованию в потоке структурных неоднородностей, характерных для турбулентного течения. Силы вязкости, наоборот, приводят к сглаживанию неоднородностей, возмущающих плавное движение жидкости. Поэтому очевидно, что течения с достаточно малыми значениями Re будут ламинарными, а с достаточно большими - турбулентными. Этот принципиальный вывод и был сформулирован О. Рейнольдсом.

Итак, все параметры турбулентного протока – скорость, давление, температура и другие – изменяются во времени. Поэтому, строго говоря, турбулентные течения являются нестационарными. Но во многих случаях средние значения параметров не изменяются во времени и такие течения называются квазистационарными. Типичный характер изменения какого либо параметра φ в произвольной точке квазистационарного турбулентного потока показан на рис.1.2. Следуя Рейнольдсу выделим из рассматриваемой величины ее осредненное значение. Как видно из рис.1.2. мгновенное значение величины φ (называемое также актуальным) в любой момент времени можно рассматривать как сумму осредненного значения $\bar{\varphi}$ и отклонения от среднего значения φ' :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad (1.1)$$

Величины φ' называются пульсационными составляющими или пульсациями физической величины φ . Например, если рассматриваются компоненты вектора скорости u_1, u_2 и u_3 , то u'_1, u'_2 и u'_3 представляют собой пульсационные скорости или скорости пульсационного движения вдоль соответствующих осей.

При проведении экспериментов с турбулентным течением жидкости в каждом из N опытов «набор» спонтанно возникающих возмущений различен. Эти возмущения, развиваясь в потоке, по разному влияют на его структуру в каждом из опытов, и мы наблюдаем N различных реализаций турбулентного поля скорости (рис. 1.1, б). Попытаться выявить и учесть все случайные возмущения - дело бесперспективное. В данном случае целесообразно, абстрагируясь от сложных причинно-следственных связей, возникающих в ходе развития возмущений, обратиться к изучению результата - развитого турбулентного поля скорости. При таком подходе турбулентное поле следует рассматривать как случайную функцию пространственных координат и времени. (Очевидно, представление о «случайном» характере физического процесса в данном случае отнюдь не противоречит общему философскому принципу детерминизма). Каждую наблюдаемую в опыте реализацию процесса следует трактовать как одного «представителя» из бесконечного ансамбля возможных реализаций случайного процесса в данной точке. Как видно из рис. 1.1, б, осциллограммы реализаций имеют весьма нерегулярный, непериодический вид, что является отражением неупорядоченного и хаотического характера турбулентного движения. Именно неупорядоченность, хаотичность движения является тем существенным признаком, который отличает турбулентное течение от ламинарного.

Будем называть величины $[u_1(t_0)]_A, [u_2(t_0)]_A, \dots, [u_N(t_0)]_A$ «выборочными значениями» случайной функции $[u(t)]_A$, наблюдаемыми в конкретных опытах в данной точке A в момент времени t_0 (рис. 1.1, б). Очевидно, что при ламинарном течении все выборочные значения $[u_i(t_0)]_A$ одинаковы, а при турбулентном течении - различны, причем мы не в состоянии предсказать точно, какое выборочное значение будет наблюдаться в данном эксперименте, а можем лишь говорить о вероятности его появления. Анализируя выборочные значения, можно сделать вывод, что они подчиняются некоторым статистическим закономерностям. Например, при достаточно большом объеме выборки N выборочное среднее $\tilde{u}(t_0)$, определяемое как среднеарифметическое выборочных значений,

$$\tilde{u}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t_0), \quad (1.1)$$

становится устойчивым, мало зависящим от N . В пределе при $N \rightarrow \infty$ выборочное среднее $\tilde{u}(t_0)$ стремится к статистически точному результату осреднения по бесконечному ансамблю случайных величин $u_i(t_0)$, называемому «математическим ожиданием» $\bar{u}(t_0)$. Заметим, что математическое ожидание и другие осредненные величины уже не зависят от случайных факторов, а определяются режимными параметрами эксперимента.

Все вышесказанное позволяет сформулировать следующее определение [3]:

Турбулентность - это движение жидкости, предполагающее неупорядоченность течения, в котором все величины (скорость, температура, давление и т. д.) претерпевают хаотические изменения по времени и пространственным координатам, но при этом могут быть выделены статистически точные их осредненные значения.

Таким образом, в статистической гидромеханике турбулентное поле вектора скорости, а также скалярные поля (температуры, давления, концентрации и т. д.) рассматривают как случайные поля, применяя при их исследовании аппарат теории вероятностей и математической статистики.

1.2. Случайное турбулентное поле и его свойства

Следуя [1], будем рассматривать некоторое турбулентное случайное поле $u(\mathbf{x}, t) = u(M)$ как случайное трехмерное поле, заданное на бесконечном множестве точек $M(\mathbf{x}, t)$ четырехмерного пространства-времени. В данном параграфе введем ряд общих понятий, присущих как векторным, так и скалярным полям. Прежде всего отметим, что возможны различные подходы к изучению случайных полей. Чаще всего при экспериментальном исследовании какой-либо датчик помещается в некоторую фиксированную точку потока с координатой x_0 , и получаемый таким образом случайный сигнал $u(x_0, t) = u(t)$ описывает изменение регистрируемого турбулентного параметра (например, одной из компонент вектора скорости) в фиксированной точке потока в функции от времени t . Но возможен и другой

способ получения информации об исследуемом турбулентном поле. Можно представить себе, что мы обладаем возможностью получить «мгновенную фотографию» рассматриваемого поля $u(x, t_0) = u(x)$, случайным образом меняющегося по пространственным координатам в фиксированный момент времени t_0 .

И наконец, если зафиксировать точку пространства x_0 и момент времени t_0 , т.е. выделить точку $M_0(x_0, t_0)$ пространства-времени, то будем иметь случайную величину $u(M_0)$.

1.2.1. Плотность вероятности

Статистическое описание случайного поля в каждой точке M четырехмерного пространства-времени задается плотностью вероятности $\rho_M(u)$ - неслучайной функцией аргумента $u(M)$, которая позволяет ответить на вопрос: какова вероятность того, что случайная величина $u(M)$ попадет в дифференциально-малый интервал $\{u, u+du\}$. Сформулированное выше условие обычно записывают в виде

$$P\{u < u(M) < u+du\} = \rho_M(u) du. \quad (1.2) \quad (1.3)$$

Вообще говоря, плотность вероятности $\rho_M(u)$ для разных точек M пространства-времени может быть различна.

Плотность вероятности можно ввести не только для случайных полей и процессов, но и для детерминированных. Например, на рис. 1.3 приведен график плотности вероятности

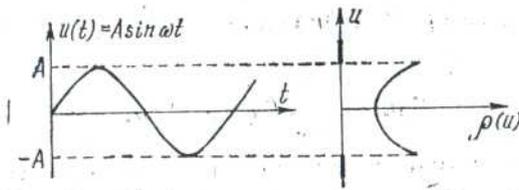


Рис. 1.2

Рис. 1.3

детерминированного гармонического процесса. Однако для случайных процессов типа турбулентности кривая плотности вероятности имеет совсем другой вид: примерно такой, как на рис. 1.4. Существенные различия формы графиков плотностей вероятности на рис. 1.3 и 1.4 полезно принять к сведению экспериментаторам. На практике по виду осциллограммы не всегда легко отличить детерминированный процесс от узкополосного случайного сигнала, однако по виду графика $\rho(u)$ сделать это не представляет труда (более подробно см. [8]). Обратившись к рис. 1.4, вспомним некоторые свойства плотности вероятности случайного процесса:

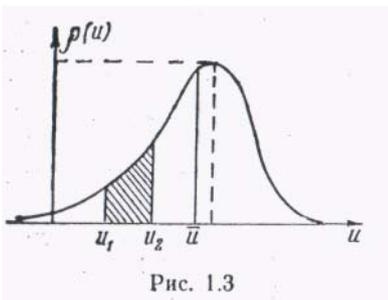


Рис. 1.3

Рис. 1.4.

1. $\rho(u) \geq 0$. Плотность вероятности - функция неотрицательная.

2. Вероятность попадания значения $u(M)$ в некоторый интервал $\{u_1, u_2\}$ вычисляется как определенный интеграл

$$P\{u_1 < u(M) < u_2\} = \int_{u_1}^{u_2} \rho(u) du.$$

3. Условие нормировки плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u) du = 1,$$

означающее, что в данной точке M величина $u(M)$ с вероятностью 100% примет какое-то конечное действительное значение.

4. Если $F(u)$ есть некоторая функция случайного аргумента $u\{M\}$, то среднее значение $\overline{F(u)}$ определяется по формуле

$$\overline{F(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \rho(u) du. \quad (1.3) \quad (1.4)$$

В частности, знание плотности вероятности позволяет вычислить вероятностное среднее значение (математическое ожидание) \bar{u} случайной величины u :

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u \rho(u) du. \quad (1.4) \quad (1.5)$$

Интересно, что среднее значение \bar{u} не всегда совпадает с наиболее «вероятным», соответствующим максимуму $\rho(u)$ см. рис.1.3). Функцию $\rho_M(u)$ принято называть одномерной плотностью вероятности, поскольку она характеризует случайную величину $u(M)$ в данной точке M , одной из бесчисленного множества точек пространства-времени. Очевидно, что для описания поля $u(M)$ необходимо знать одномерные плотности вероятности во всех точках рассматриваемой области. Однако для однозначного описания поля $u(M)$ этого недостаточно. Одномерные плотности вероятности описывают поведение случайной величины в каждой отдельно взятой точке и не могут учитывать взаимного влияния процессов в различных точках, другими словами, статистическую связь между ними. Для описания статистической связи между двумя произвольными точками необходимо знать двумерные плотности

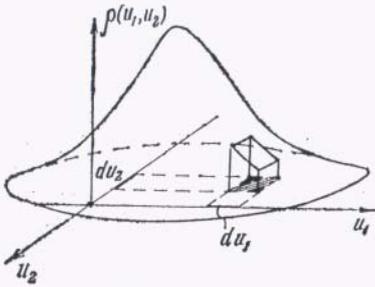


Рис. 1.4

Рис.1.5

вероятности.

Рассмотрим две точки M_1 и M_2 , различающиеся в пространстве или во времени. Для величин $u_1(M_1)$ и $u_2(M_2)$ должна существовать двумерная плотность вероятности $\rho_{M_1 M_2}(u_1, u_2)$, определяемая соотношением:

$$\begin{aligned} P\{u_1 < u_1(M_1) < u_1 + du_1; u_2 < u_2(M_2) < u_2 + du_2\} = \\ = \rho_{M_1 M_2}(u_1, u_2) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (1.5) \quad (1.6)$$

Здесь, как и в выражении (1.3), знак $P\{\dots\}$ означает вероятность выполнения условия, указанного в фигурных скобках.

Двумерная плотность вероятности представляет собой колоколообразную поверхность, изометрически изображенную на рис.1.5. Изображенный на рисунке объем численно равен вероятности (1.6). Некоторые свойства двумерной плотности вероятности выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \rho_{M_1 M_2}(u_1, u_2) \geq 0; \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \rho_{M_1 M_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 = 1; \\ \rho_{M_1}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{M_1 M_2}(u_1, u_2) du_2; \quad \rho_{M_2}(u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{M_1 M_2}(u_1, u_2) du_1. \end{aligned}$$

Два последних соотношения выражают так называемое «свойство согласованности», из которого следует, что, зная двумерную плотность вероятности, всегда можно определить соответствующие одномерные плотности вероятности в точках M_1 и M_2 . Обратное, вообще говоря, неверно. Лишь в том случае, когда процессы в точках M_1 и M_2 статистически независимы, справедливо

$$\rho_{M_1 M_2}(u_1, u_2) = \rho_{M_1}(u_1) \rho_{M_2}(u_2). \quad (1.6) \quad (1.7)$$

Заметим, что в турбулентных случайных полях наблюдается статистическая связь между точками, разделенными даже значительными временными или пространственными интервалами. Это не позволяет определить двумерную плотность вероятности, по известным одномерным.

Однако знания двумерных плотностей вероятности в любых парах точек M_1 и M_2 также недостаточно. Для однозначного описания случайного поля $u(x_1, x_2, x_3, t)$ необходимо задать совокупность бесконечного числа многомерных плотностей

вероятности, иными словами необходимо уметь задать любую N-мерную плотность вероятности $\rho_{M_1, M_2, \dots, M_N}(u_1, u_2, \dots, \dots, u_N)$ случайных величин $u_1(M_1), u_2(M_2), u_3(M_3), \dots, \dots, u_N(M_N)$, взятых в произвольных N точках пространства-времени. Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать свойства N-мерной плотности вероятности.

Знание N-мерных плотностей вероятности позволяет определять всевозможные статистические характеристики рассматриваемого случайного поля. Статистическими характеристиками мы будем называть неслучайные величины или функции, полученные в результате той или иной операции статистической обработки (осреднения) каких-либо случайных величин, процессов, полей. Пусть $F(u_1, u_2, \dots, u_N)$ - некоторая функция случайных аргументов, заданная в N точках пространства времени. Тогда ее осредненное значение определяется следующим образом:

$$\overline{F(u_1, u_2, \dots, u_N)} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1, u_2, \dots, u_N) \rho_{M_1, M_2, \dots, M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) \times du_1 du_2 \dots du_N. \quad (1.7) \quad (1.8)$$

Заметим, что выражение (1.4) является частным случаем (1.8).

1.2.2. Стационарные, однородные, изотропные поля*

Мгновенные (актуальные) значения любого параметра турбулентного поля неупорядоченно, хаотически меняются по времени и пространству, поэтому говорить об однородности, изотропии или стационарности имеет смысл только применительно к осредненным характеристикам этого поля.

Стационарным называется такое случайное поле, все статистические характеристики которого не зависят от выбора начала отсчета на оси времени. Данное определение применимо как к случайному полю в целом, так и к процессу в некоторой точке. В последнем случае говорят о стационарном случайном процессе в некоторой точке пространства.

Строго говоря, понятие стационарности предполагает бесконечную протяженность во времени. Поэтому на практике можно говорить только о стационарности в пределах конечного интервала времени.

В лабораторном эксперименте для обеспечения стационарности турбулентности необходимо и достаточно поддерживать неизменными режимные параметры.

Однородным называется такое случайное поле, все статистические характеристики которого не изменяются при всевозможных параллельных переносах осей декартовой системы координат. Однородность подразумевает пространственную безграничность поля. В атмосферной, океанической турбулентности и в лаборатории возможны ситуации, когда однородность поля будет приблизительно реализована в некоторой области течения. Примером может служить течение в аэродинамической трубе вдали от стенок.

Возможны случаи, когда случайное поле, не являясь пространственно однородным, будет однородным в плоскости. Пример: турбулентное поле течения между параллельными бесконечными плоскими стенками является однородным в любой плоскости, параллельной стенкам. И, наконец, можно говорить об однородности вдоль прямой, например, вдоль любой прямой, параллельной оси трубы при наличии гидродинамической и тепловой стабилизации турбулентного течения в трубе.

Изотропным называется такое случайное поле, все статистические характеристики которого остаются неизменными при всевозможных вращениях и зеркальных отражениях осей декартовой системы координат.*).

Сама по себе модель изотропной турбулентности неприменима для описания каких-либо реальных турбулентных течений. Тем не менее, введение этого понятия (Дж. Тейлор, 1935 год), оказалось весьма плодотворным. Во-первых, математический аппарат статистической теории изотропной турбулентности оказался наиболее простым. Во-вторых, хотя любое

* Более строгие определения этих понятий приведены в [1, с. 201, 204].

турбулентное движение в целом и его крупномасштабные структурные неоднородности являются анизотропными, статистический режим пульсаций достаточно малых масштабов при определенных условиях (см. гл.3) можно считать близким к изотропному.

Важно подчеркнуть, что сформулированные нами определения стационарности и однородности в равной степени применимы как к скалярным полям, о которых речь шла выше, так и к векторным. Что касается нашего определения изотропии, то оно, строго говоря, нуждается в некотором уточнении применительно к векторным полям [2].

1.2.3. Способы осреднения. Понятие об эргодичности

Осреднение по ансамблю реализаций. Основой статистического подхода к теории

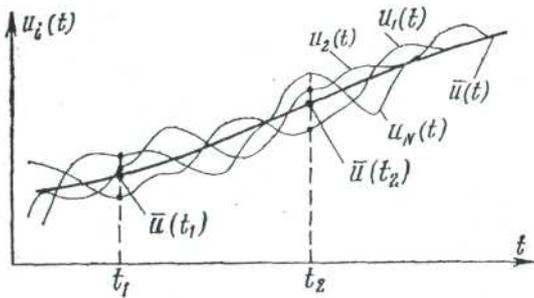


Рис. 1.5

Рис.1.6

турбулентности, как мы уже говорили, является представлением о статистическом ансамбле. Допустим, что зафиксировано N реализаций некоторого случайного процесса (рис. 1.6). Индекс i указывает порядковый номер реализации. В любой момент времени, например t_1 , можно найти выборочное среднее $\tilde{u}(t_1)$ как среднее арифметическое N соответствующих выборочных значений:

$$\tilde{u}(t_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t_1).$$

Нетрудно показать, что предел этого выражения при $N \rightarrow \infty$, представляющий собой операцию осреднения по бесконечному ансамблю выборочных значений, есть не что иное, как теоретико-вероятностное определение среднего (1.5):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{u}(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t_1) \rho(u) du = \bar{u}(t_1). \quad (1.8) \quad (1.9)$$

Действительно, сумму в выражении (1.9) можно переписать так:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{N_j}{N} u_j(t_1).$$

Здесь N_j - количество выборочных значений $u_i(t_1)$, близких по величине, попадающих в некоторый j -й интервал $\{u, u+du\}$. Тогда N_j/N - вероятность попадания выборочного значения в этот интервал, равна

$$\frac{N_j}{N} = P \{u < u_j(t_1) < u + du\} = \rho(u) du,$$

вследствие чего справедливость (1.9) становится очевидной. На практике N всегда конечно, поэтому среднее значение $\bar{u}(t_1)$ может быть определено с той или иной степенью приближения

$$\bar{u}(t_1) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t_1), \quad (1.9) \quad (1.10)$$

зависящей от объема выборки N [8]-[12]. Во всяком случае, алгоритм (1.10) осреднения по ансамблю реализаций является вполне статистически обоснованным. Важно подчеркнуть, что способ осреднения по ансамблю применим как для стационарных, так и для нестационарных процессов. В последнем случае, проводя операцию осреднения (1.10) в различные моменты времени t_1, t_2, \dots (рис. 1.6), можно установить зависимость среднего значения от времени (жирная линия на графике).

Однако на практике осреднение по ансамблю применяется редко и только тогда, когда другие способы осреднения непригодны, например, при анализе существенно нестационарных процессов. Дело в том, что получить ансамбль реализаций многократным повторением опытов в условиях лаборатории, как правило, сложно и дорого, а при изучении природной турбулентности атмосферы или океана просто невозможно.

Осреднение по времени. Данный способ осреднения позволяет получить искомую статистическую характеристику по одной реализации процесса.

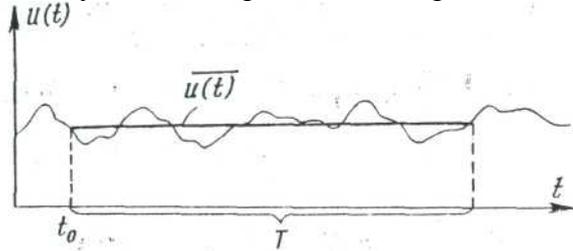


Рис. 1.6

Рис. 1.7

Пусть мы имеем отрезок реализации $u(t)$ некоторой длины T (рис. 1.7). Очевидным является следующий способ осреднения по времени:

$$\overline{u(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt, \quad (1.10)$$

(1.11)

или в общем виде

$$\overline{F(u(t))} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F[u(t)] dt, \quad (1.11)$$

(1.12)

Естественно, хотелось бы, чтобы результат осреднения по времени при увеличении интервала осреднения T сходился бы к результату осреднения по бесконечному ансамблю реализаций, т. е. к соответствующему теоретико-вероятностному значению (1.9). При этом технически сложное осреднение по ансамблю реализаций можно заменить несравненно более простым осреднением одной реализации по времени. Процессы, для которых это условие выполняется, называются «эргодическими случайными процессами», а само условие - условием эргодичности.

Оказывается, что многие (но не все) физические процессы являются эргодическими. Очевидно, что эргодический способ осреднения (1.12) имеет смысл только применительно к стационарным процессам, поскольку результат осреднения не зависит от времени. Однако не всякий стационарный процесс обладает эргодическим свойством. Помимо стационарности процесс $u(t)$ должен удовлетворять некоторым условиям эргодичности, которые могут быть различными в зависимости от того, какую именно статистическую характеристику $\overline{F[u(t)]}$ требуется определить [8,9]. Таким образом, один и тот же процесс $u(t)$ может быть эргодическим по отношению к одним статистическим характеристикам и не обладать этим свойством по отношению к другим. В последнем случае попытка применить (1.12) привела бы к недостоверному результату. Забегая вперед, отметим, что стационарная турбулентность, к счастью, эргодична по отношению ко многим осредненным характеристикам, среди которых особое место занимают так называемые «статистические моменты» различных порядков: математическое ожидание (1.11), дисперсия, корреляционные функции и т. д. Поэтому ниже будут часто использоваться формулы осреднения по времени без дополнительных оговорок.

На практике мы всегда располагаем реализациями конечной длины, поэтому искомые статистические характеристики временным осреднением могут быть определены лишь с той или иной степенью приближения. Чрезвычайно важен вопрос оптимального выбора времени интегрирования T . С одной стороны, интервал T из соображений экономии рабочего времени и удобства хотелось бы уменьшить. Кроме того, в течение большого промежутка времени трудно соблюсти условие стационарности. С другой стороны, интуиция подсказывает, что для обеспечения требуемой точности этот интервал должен быть велик по сравнению с характерным

периодом турбулентных пульсаций. Конкретные количественные рекомендации даны, например, в [6].

Осреднение как по ансамблю, так и по времени (для эргодических процессов) обеспечивает выполнение ряда условий, известных читателю как *правила осреднения Рейнольдса*

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}, \quad (1.12a)$$

$$\overline{af} = a\overline{f}, \quad (1.12б)$$

$$\overline{a} = a, \quad (1.12в)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial f}{\partial s}}, \quad (1.12г)$$

$$\overline{fg} = \overline{f}\overline{g}, \quad (1.12д)$$

(1.13)

(1.13д)

где s — это

где s — это x_1, x_2, x_3 или t , $a = \text{const}$, f и g — случайные функции. Из условий (1.13) вытекают важные следствия:

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}, \quad \overline{\overline{f'}} = \overline{f' - \overline{f'}} = 0, \quad \overline{\overline{f}h} = \overline{f} \cdot \overline{h}, \quad \overline{\overline{f}h'} = \overline{f} \cdot \overline{h'}. \quad (1.13) \quad (1.14)$$

Применение правил Рейнольдса к дифференциальным уравнениям гидродинамики позволяет без большого труда получить уравнения для средних значений случайных гидродинамических полей (см. гл. 3).

Следует иметь в виду, что в литературе обсуждаются другие способы осреднения [1], на которых авторы считают возможным здесь не останавливаться.

1.3. Моменты случайного скалярного поля

Знание бесконечной совокупности конечномерных плотностей вероятности $\rho_{M_1, M_2, \dots, M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)$ дает полную информацию о случайном поле $u(\mathbf{x}, t)$. Однако реализовать этот наиболее общий подход на практике представляется невозможным. Даже наиболее простые одно- и двумерные плотности вероятности турбулентных полей, как правило, не удастся определить теоретическим путем, а экспериментальное определение этих функций — очень сложная задача, которая может быть решена только при наличии специальной дорогостоящей аппаратуры. Поэтому обычно на практике используют другие статистические характеристики. Разумеется, каждая из них характеризует турбулентное течение весьма односторонне, но все вместе они дают достаточную для практики информацию. Наиболее распространенными среди этих статистических характеристик являются моменты.

Статистический момент — это неслучайная функция, представляющая собой осредненное произведение случайных величин, взятых в одной или в различных точках пространства-времени:

$$B_{M_1, M_2, \dots, M_N} = \overline{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_N^{k_N}} = \int \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1^{k_1} \dots u_N^{k_N} \rho_{M_1, \dots, M_N} \times \\ \times (u_1 \dots u_N) du_1 \dots du_N, \quad (1.14) \quad (1.15)$$

где u_i — случайная величина в точке M_i ; N — число точек пространства-времени, которое

определяет тип момента; k_i — натуральные числа, показатели степени. $\sum_{i=1}^N k_i$ — порядок момента.

Например, $B_{M_1, M_2} = \overline{u^2(M_1)u^3(M_2)}$ — двухточечный момент пятого порядка.

Для полного однозначного задания случайного поля необходимо задать, как и при использовании многомерных плотностей вероятности, бесконечно большую совокупность моментов всевозможных типов и порядков, что практически невыполнимо. На практике ограничиваются рассмотрением сравнительно небольшого числа простейших моментов низших порядков, образующих некоторый «традиционный минимальный набор», изучению которого посвящено большинство исследований турбулентности.

Для простоты сначала рассмотрим моменты скалярного, случайного поля, примером которого является температурное поле в неизотермическом турбулентном потоке.

1.3.1. Математическое ожидание (среднее значение)

Математическое ожидание \bar{u} - это одноточечный момент первого порядка. По определению (1.5):

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u \rho(u) du.$$

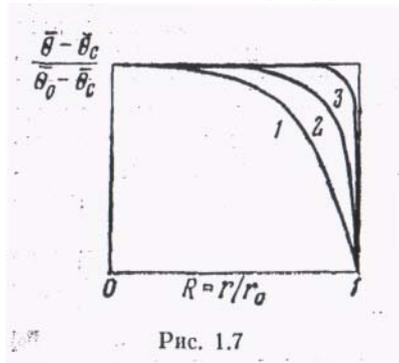
Другие часто встречающиеся обозначения математического ожидания: μ_u или $M[u]$.

Как уже отмечалось, стационарные турбулентные процессы обладают эргодическим свойством по отношению к моментам, поэтому для стационарного процесса $u(t)$ справедливо

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (1.15)$$

Строго говоря, равенство (1.16) является приближенным (сравним с точным соотношением (1.10)), но это пока не существенно. Математическое ожидание характеризует средний уровень, вокруг которого пульсирует случайный процесс. Процесс $u'(t)$ называется центрированным, если $\overline{u'(t)} = 0$. Произвольный процесс $u(t)$ можно центрировать, приведя к виду $u'(t) = u(t) - \bar{u}$, что следует из правил осреднения Рейнольдса.

Примером математического ожидания скалярного случайного поля может служить осредненная температура $\bar{\theta}$ в неизотермическом турбулентном потоке. На рис. 1.8 приведены



характерные графики профилей осредненной температуры при турбулентном течении трех различных жидкостей в обогреваемых трубах. На рис.1.8: кривая 1- жидкий металл, ($Pr=0,02$); кривая 2 -воздух, ($Pr=0,7$); кривая 3 -вода, ($Pr=7,0$). Числа Рейнольдса одинаковы, числа Прандтля существенно различны. Видно, что поле температуры определяется не только структурой поля скорости, зависящей от числа Re , но и молекулярными свойствами жидкостей. Через изменение этих свойств температурное поле, в свою очередь, оказывает влияние на турбулентное поле скорости. Однако мы будем рассматривать

Рис.1.8

случаи, когда этим влиянием можно пренебречь и считать температуру «пассивной скалярной примесью», перемешиваемой турбулентностью, но не влияющей на нее.

1.3.2. Средний квадрат

Средний квадрат Ψ_u^2 представляет собой одноточечный момент второго порядка

$$\Psi_u^2 = \bar{u^2} = M[u^2] = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \rho(u) du. \quad (1.16)$$

Поскольку $u = \bar{u} + u'$, данная статистическая характеристика содержит информацию и об осредненной, и о пульсационной компонентах случайного поля. Используется Ψ_u^2 сравнительно редко.

1.3.3. Дисперсия

Дисперсия σ_u^2 —одноточечный *центральный* момент второго порядка, т. е. среднее значение квадрата *центрированного* процесса:

$$\sigma_u^2 = M[(u - \bar{u})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \bar{u})^2 \rho(u) du. \quad (1.17)$$

Дисперсия является одной из важнейших статистических характеристик пульсационного процесса, характеризующих «энергию» пульсаций. Раскрывая скобки в подынтегральном выражении (1.18) получаем

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \rho(u) du - 2\bar{u} \int_{-\infty}^{\infty} u \rho(u) du + \bar{u}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u) du = \bar{u^2} - \bar{u}^2$$

или

$$\Psi_u^2 = \bar{u}^2 + \sigma_u^2. \quad (1.18) \quad (1.19)$$

Это значит, что «энергия» случайного процесса равна сумме «энергии» осредненной компоненты этого процесса и «энергии» пульсаций. Здесь необходимо дать пояснение, почему термин «энергия» заключается в кавычки. При рассмотрении турбулентного поля скорости (см. ниже) величины Ψ_u^2 , \bar{u}^2 и σ_u^2 действительно характеризуют соответственно суммарную кинетическую энергию турбулентного течения, энергию осредненного поля скорости и энергию пульсационного движения единицы массы жидкости, отличаясь от них лишь постоянным множителем 1/2. Применение этого термина к другим величинам, например к температуре, является формальным, основанным на аналогии соответствующих выражений. Такая формальная аналогия часто оказывается удобной, хотя рассматриваемые статистические характеристики, разумеется, имеют другие размерности и физический смысл. Для стационарного процесса $u(t)$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [(u(t) - \bar{u})^2] dt. \quad (1.19) \quad (1.20)$$

Величина $\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2}$ в гидромеханике носит название «интенсивность пульсаций». Другие названия этой же величины: в электротехнике – действующее или эффективное значение, в статистике – среднеквадратичное значение или стандартное отклонение. Достоинством интенсивности пульсаций σ_u является то, что ее размерность совпадает с размерностью самого пульсационного

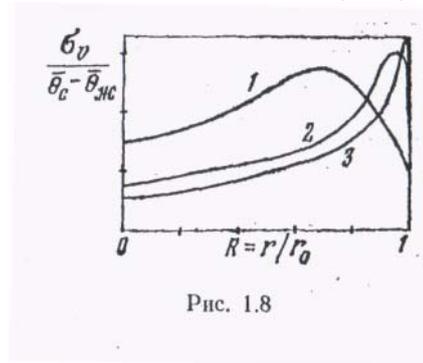


Рис. 1.9

процесса. Поэтому σ_u можно трактовать как «средний размах» пульсаций.

Для примера рассмотрим типичные графики интенсивности турбулентных пульсаций температуры при течении различных жидкостей в трубах (рис. 1.8). (1 – жидкий металл; 2 – воздух; 3 – вода.). Как видно, пульсации температуры наблюдаются по всему сечению трубы. Интенсивность пульсаций возрастает в направлении от оси к стенке, достигает максимума, а затем существенно снижается. Положение максимума в потоке зависит от числа Прандтля. Можно предположить, что интенсивность пульсаций температуры как-то связана с уровнем пульсаций скорости и величиной градиента осредненной температуры (рис. 1.8). Однако объяснить характер изменения σ_u по сечению совсем не просто. Мы к этому вернемся ниже. Интересно, что пульсации температуры вблизи стенки снижаются не до нуля и благодаря теплопроводности даже проникают в стенку трубы. Это вызывает пульсирующие термические напряжения стенки, что может привести к ее усталостному разрушению.

1.3.4. Коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса

Коэффициент асимметрии A представляет собой приведенный к безразмерному виду одноточечный центральный момент третьего порядка вида

$$A = \frac{(u - \bar{u})^3}{(\sigma_u^2)^{3/2}}. \quad (1.20) \quad (1.21)$$

Коэффициент эксцесса E (коэффициент сплющивания) – приведенный к безразмерному виду одноточечный центральный момент четвертого порядка

$$E = \frac{(u - \bar{u})^4}{(\sigma_u^2)^2}. \quad (1.21) \quad (1.22)$$

Коэффициенты A и E характеризуют форму осциллограмм случайных процессов и, следовательно, форму кривых на графиках соответствующих плотностей вероятности. Обычно эти статистические характеристики используют как меру отклонения плотности вероятности исследуемого процесса от нормального распределения (см. ниже).

1.4. Корреляционная функция

Рассмотрению этой характеристики, одной из важнейших в статистической гидромеханике, посвящаем отдельный параграф. Пусть $u(M)$ и $v(M)$ - случайные поля, заданные на бесконечном числе точек $M(x, t)$ пространства-времени. Корреляционная функция, вообще говоря, представляет собой двухточечный центральный момент второго порядка вида:

$$\begin{aligned} B_{uv}(x_1, t_1, x_2, t_2) &= \overline{[u(x_1, t_1) - \mu_u(x_1, t_1)][v(x_2, t_2) - \mu_v(x_2, t_2)]} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x_1, t_1) - \mu_u(x_1, t_1)][v(x_2, t_2) - \mu_v(x_2, t_2)] \rho_{M_1 M_2}(u, v) du dv, \end{aligned} \quad (1.22) \quad (1.23)$$

где $\rho_{M_1 M_2}(u, v)$ — двумерная плотность вероятности, взятая в точках $M_1(x_1, t_1)$ и $M_2(x_2, t_2)$. Практическая и научная значимость корреляционной функции заключается в том, что эта характеристика является мерой статистической связи (*correlation* - взаимосвязь) между пульсациями в точках M_1 и M_2 . Различают следующие разновидности корреляционных функций:

1. Если u и v — случайные поля различных физических величин (скорость и температура, различные компоненты скорости и т. д.), то функцию B_{uv} будем называть взаимно корреляционной функцией.

2. Если $t_2 = t_1$, $x_2 \neq x_1$, т. е. точки M_1 и M_2 суть различные пространственные точки, то $B_{uv}(x_1, x_2)$ называется пространственной корреляционной функцией.

3. Если $x_2 = x_1$, $t_2 \neq t_1$, т. е. рассматривается одна пространственная точка, а M_1 и M_2 - различные точки на оси времени, то $B_{uv}(t_1, t_2)$ будем называть *временной корреляционной функцией*.

4. Если $t_2 \neq t_1$, $x_2 \neq x_1$, т. е. точки M_1 и M_2 разнесены и по пространству и по времени, то корреляционную функцию называют *пространственно-временной*.

1.4.1. Автокорреляционная функция

Эта функция представляет собой частный случай временной корреляционной функции при $u \equiv v$, т. е. автокорреляционная функция характеризует статистическую связь процесса $u(t)$ «с самим собой» в другие моменты времени. В дальнейшем для простоты записи выражений без ограничения общности будем считать процесс $u(t)$ центрированным: $\mu_u = 0$. Тогда в соответствии с (1.23) автокорреляционная функция

$$B_{uu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t_1) u(t_2) \rho_{t_1 t_2}(u, u') du du', \quad (1.23) \quad (1.24)$$

где u и u' - значения $u(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 .

Удобно записать $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$, где τ - временной сдвиг между этими точками и $B_{uu}(t_1, t_2) = B_{uu}(t, \tau)$. Очевидно, что для *стационарного* процесса $u(t)$ автокорреляционная функция не должна зависеть от t и зависит только от τ , т. е. $B_{uu}(t, \tau) = B_{uu}(\tau)$. В силу эргодичности турбулентных процессов по отношению к автокорреляционной функции можно записать

$$B_{uu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) u(t + \tau) dt. \quad (1.24) \quad (1.25)$$

Рассмотрим основные свойства автокорреляционной функции стационарного случайного процесса.

1. В силу стационарности $\overline{u(t)u(t+\tau)} = \overline{u(t-\tau)u(t)}$; следовательно, автокорреляционная функция является четной:

$$B_{uu}(\tau) = B_{uu}(-\tau). \quad (1.25) \quad (1.26)$$

Поэтому на графике достаточно изобразить положительную ветвь кривой $B_{uu}(\tau)$ (рис. 1.10).

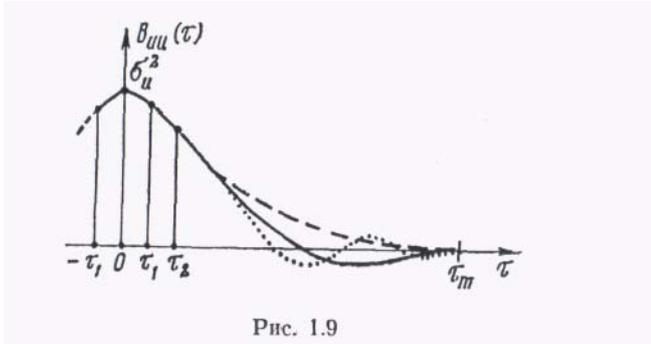


Рис. 1.9

Рис.1.10

2. Из (1.25) следует, что автокорреляционная функция при нулевом значении аргумента τ равна дисперсии:

$$B_{uu}(0) = \sigma_u^2. \quad (1.26) \quad (1.27)$$

3. Нетрудно показать, что при любом τ

$$B_{uu}(0) \geq B_{uu}(\tau). \quad (1.27) \quad (1.28)$$

Для доказательства рассмотрим неотрицательное выражение

$$\overline{[u(t+\tau) - u(t)]^2} \geq 0. \quad (1.28) \quad (1.29)$$

Раскроем скобки и учтем, что $\overline{u(t+\tau)^2} = \overline{u(t)^2} = \sigma_u^2$; тогда

$$\overline{u(t+\tau)^2 - 2u(t+\tau)u(t) + u(t)^2} = 2[\sigma_u^2 - B_{uu}(\tau)] \geq 0,$$

откуда следует (1.28).

4. Если процесс $u(t)$ является «чисто случайным» и не содержит детерминированных периодических компонент, а мы полагаем, что это именно так, то,

$$B(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (1.29) \quad (1.30)$$

Можно сказать, что случайный процесс «помнит» свою предысторию только некоторый конечный промежуток времени.

Для построения автокорреляционной функции на практике поступают следующим образом. Пусть мы имеем одну реализацию случайного процесса $u(t)$.

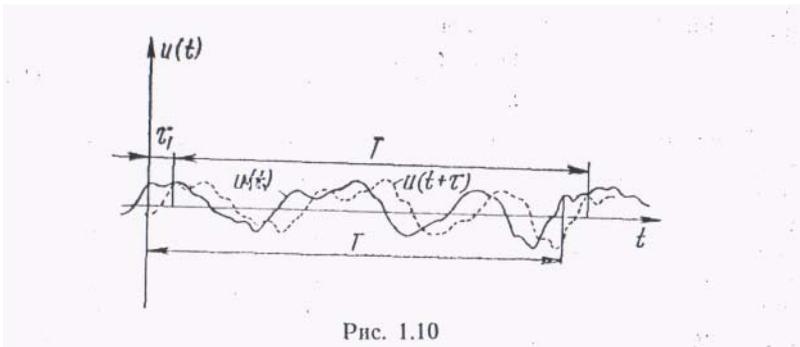


Рис. 1.10

Рис.1.11

(рис.1.10). Приняв какой-то момент времени t за начало отсчета, вырежем кусок реализации длиной T . Задавая конкретные значения временного сдвига τ_i , будем вычислять соответствующие значения $B_{uu}(\tau_i)$, пользуясь алгоритмом (1.25).

При $\tau=0$, согласно (1.25), следует осциллограмму длиной T умножить саму на себя и полученную функцию (неотрицательную!) проинтегрировать, причем, как уже отмечалось, в результате получим максимально возможное значение автокорреляционной функции $B_{uu}(0)$, равное дисперсии σ_u^2 . Отложим эту точку на графике рис. 1.10.

Для $\tau=\tau_1$ всю осциллограмму целиком сдвигаем вдоль оси абсцисс на расстояние τ_1 , умножаем на исходную осциллограмму и интегрируем от 0 до T . Полученное значение $B_{uu}(\tau_1)$, также наносим на график. Очевидно, $B_{uu}(\tau_1) < B_{uu}(0)$. Действительно, при умножении со сдвигом подынтегральная функция на некоторых участках станет отрицательной,

вследствие чего величина определенного интеграла (1.25) уменьшится. Повторяя эту процедуру при $\tau = \tau_2, \tau_3, \dots$, убеждаемся, что с ростом аргумента τ функция $B(\tau)$, асимптотически приближается к нулю. В зависимости от характера процесса $u(t)$ это приближение к нулю может быть монотонным (пунктир), немонотонным (сплошная линия), либо могут наблюдаться осцилляции (точки). Во всяком случае, существует некоторое значение τ_m , начиная с которого $B_{uu}(\tau)$ практически не отличается от нуля.

Мы перечислили некоторые свойства, присущие автокорреляционным функциям любого стационарного процесса. Рассмотрим еще одно важное свойство:

5. Автокорреляционная функция $B_{uu}(\tau)$ при $\tau=0$ является дифференцируемой. В частности, вследствие четности функции $B_{uu}(\tau)$ справедливо

$$\left[\frac{\partial B_{uu}(\tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} = 0. \quad (1.30)$$

(1.31)

В отличие от предыдущих данное условие выполняется не всегда, а лишь для автокорреляционных функций тех процессов $u(t)$, которые непрерывны и имеют непрерывные производные. Применительно к турбулентности это верно. Турбулентные скалярные и векторные поля хотя и имеют весьма сложную неупорядоченную структуру, но не терпят разрывов. Структурные неоднородности этих полей всегда имеют конечные размеры вследствие сглаживающих молекулярных эффектов. Пример: температура в турбулентном потоке не может изменяться скачкообразно из-за наличия молекулярной теплопроводности.

1.4.2. Коэффициент автокорреляции и временные масштабы

Коэффициент автокорреляции представляет собой безразмерную автокорреляционную функцию вида

$$R_{uu}(\tau) = \frac{B_{uu}(\tau)}{B_{uu}(0)} = \frac{B_{uu}(\tau)}{\sigma_u^2}. \quad (1.31)$$

(1.32)

Очевидно, коэффициент автокорреляции $R_{uu}(\tau)$ в точке $\tau=0$ принимает максимальное значение, равное единице, и сохраняет другие вышеперечисленные свойства автокорреляционной функции. Типичный график коэффициента автокорреляции стационарного случайного процесса приведен на рис.1.12. Итак, коэффициент $R_{uu}(\tau)$ меняется от единицы при $\tau=0$, что соответствует 100-процентной корреляции процесса «с самим собой», до нуля при $\tau \rightarrow \infty$, что соответствует отсутствию корреляционной связи процесса для больших временных интервалов. Поскольку $R_{uu}(\tau)$ — функция четная и не имеет особенностей в точке $\tau=0$, разложим эту функцию в ряд Маклорена по четным степеням в окрестности этой точки:

$$R_{uu}(\tau) = 1 + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 R_{uu}(\tau)}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=0} \cdot \tau^2 + \frac{1}{4!} \left[\frac{\partial^4 R_{uu}(\tau)}{\partial \tau^4} \right]_{\tau=0} \cdot \tau^4 + \dots$$

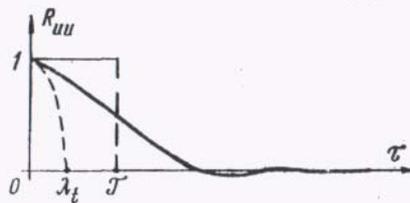


Рис. 1.11

Рис. 1.12

В области очень малых τ ограничимся двумя первыми членами ряда

$$R_{uu}(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{\lambda_t^2}, \quad (1.32)$$

(1.33)

где

$$\frac{1}{\lambda_t^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_{uu}(\tau)}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=0}. \quad (1.33)$$

(1.34)

Имеющая размерность времени величина λ_t была введена Дж. Тейлором и носит название «тейлоровского временного микромасштаба турбулентности». Формула (1.33) показывает, что в вершину кривой на графике коэффициента автокорреляции (рис.1.12) может быть вписана квадратичная парабола, которая отсекает от оси t отрезок, численно равный временному микромасштабу λ_t . Это обстоятельство помогает понять физический смысл λ_t . Как будет показано ниже, случайный процесс $u(t)$ может быть представлен как суперпозиция гармонических колебаний различных частот. На осциллограмме турбулентных пульсаций (см. рис.1.11) обычно можно выделить и высокочастотные колебания и колебания большого периода. Нетрудно уяснить, что форма кривой $R_{uu}(\tau)$ вблизи ее вершины определяется, в основном, высокочастотными пульсациями, а «хвост» кривой при больших значениях t определяется преимущественно колебаниями низкой частоты. Следовательно, микромасштаб λ_t связан с пульсациями высокой частоты. Принято считать, что временной микромасштаб λ_t имеет порядок характерного периода высокочастотных пульсаций случайного турбулентного процесса.

Еще одной важной временной характеристикой турбулентности, также введенной Дж. Тейлором, является «временной макромасштаб» (другое название - «интегральный масштаб»):

$$\tau = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) d\tau. \quad (1.34) \quad (1.35)$$

Макромасштаб τ характеризует средний период низкочастотных компонент случайного процесса. Как видно из формулы (1.35), на графике (рис.1.12)

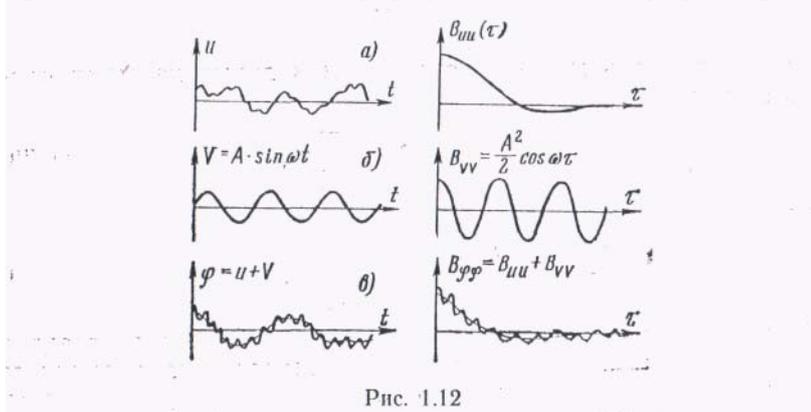


Рис. 1.12

Рис.1.13

макромасштаб τ изображается отрезком в основании прямоугольника высотой равной единице, площадь которого численно равна площади под кривой коэффициента корреляции $R_{uu}(\tau)$.

Очевидно, чем больше значение τ по сравнению с λ_t , тем шире спектр процесса.

Таким образом, автокорреляционная функция и коэффициент автокорреляции являются очень информативными статистическими характеристиками.

Для дополнительного подтверждения этого вывода рассмотрим следующие примеры. На рис.1.13 приведены три процесса и соответствующие им автокорреляционные функции. Первый из них $u(t)$ (рис.1;13, а) - стационарный случайный процесс. Его автокорреляционную функцию мы рассмотрели выше. На рис. 1.13,б показан процесс синусоидальных колебаний с частотой ω . Разумеется, для детерминированных процессов понятие автокорреляционной функции также применимо. В данном случае легко найти ее аналитическое выражение:

$$B_{vv}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau.$$

Во-первых, отметим, что функция $B_{vv}(\tau)$ в этом случае не стремится асимптотически к нулю при возрастании аргумента. Это является характерным признаком, отличающим детерминированный процесс от случайного. Во-вторых, автокорреляционная функция есть гармоническая функция той же частоты ω . Этим примером мы иллюстрируем важное общее свойство автокорреляционных функций: в них содержатся все те же гармоники, что и в исходных процессах (ни одной не потеряно и ни одной лишней). Поэтому теоретически можно вместо

спектрального анализа реализации некоторого процесса проводить спектральный анализ его автокорреляционной функции (см. гл. 2).

Теперь обратимся к рис.1.13, в. На нем изображена осциллограмма процесса $\varphi(t) = u(t) + v(t)$. (Графики на рис.1.13, а, б, в для удобства восприятия даны в разных масштабах). Подобные осциллограммы наблюдают экспериментаторы, когда не удается избавиться от синусоидальных помех промышленной частоты. Если процессы $u(t)$ и $v(t)$ некоррелированы, то, как читатель легко может самостоятельно убедиться, их автокорреляционные функции аддитивны: $B_{\varphi\varphi}(\tau) = B_{uu}(\tau) + B_{vv}(\tau)$, что и изображено на рисунке. На «хвосте» функции $B_{\varphi\varphi}(\tau)$ мы видим незатухающую синусоиду, что позволяет со всей уверенностью сделать вывод о засоренности исследуемого случайного процесса гармоническим шумом. По осциллограмме процесса сделать подобный вывод часто бывает затруднительно.

1.4.3. Пространственная корреляционная функция скалярного поля

В системе декартовых координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ рассмотрим некоторую область пространства, в которой в данный момент времени t задано случайное скалярное поле $u(x, t)$. Пусть $M_1(x)$ и $M_2(x+r)$ - две точки пространства, расстояние между которыми определяет вектор r . В соответствии с общим определением (1.23) введем пространственную корреляционную функцию

$$B_{uu}(x, r, t) = [u(x, t) - \bar{u}(x, t)][u(x+r, t) - \bar{u}(x+r, t)], \quad (1.35) \quad (1.36)$$

которая в общем случае зависит от x - координаты одной из точек, от r - расстояния между точками, а также от времени. Будем полагать, что математическое ожидание $\bar{u} = 0$ в любой точке пространства. Это допущение не приводит к каким-либо ограничениям, но позволяет упростить выражения. Тогда (1.36) примет вид

$$B_{uu}(x, r, t) = u(x, t)u(x+r, t). \quad (1.35a) \quad (1.36a)$$

Если поле однородно, то корреляционная функция не зависит от координаты x , т. е. $B_{uu}(r, t)$. Если поле, кроме того, является стационарным, то корреляционная функция, во-первых, не зависит от времени и, во-вторых, может быть определена осреднением по времени:

$$B_{uu}(r) = \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t)u(x+r, t) dt. \quad (1.36) \quad (1.37)$$

Чаще всего точки M_1 и M_2 выбирают так, чтобы они лежали на одной из осей декартовой системы координат - x_1 , x_2 или x_3 . Соответствующие пространственные корреляционные функции - $B_{uu}(r_1)$, $B_{uu}(r_2)$ и $B_{uu}(r_3)$. Выберем любую из этих функций, например $B_{uu}(r_1)$, и рассмотрим ее свойства.

Поскольку стационарность есть не что иное, как однородность во времени, то все выводы об автокорреляционной функции $B_{uu}(\tau)$ стационарного процесса могут быть перенесены на пространственную корреляционную функцию $B_{uu}(r_1)$ однородного поля, а именно:

$$B_{uu}(r_1) = B_{uu}(-r_1); \quad B_{uu}(0) = \sigma_u^2 \geq B_{uu}(r_1); \quad \left[\frac{\partial B_{uu}(r_1)}{\partial r_1} \right]_{r_1=0} = 0. \quad (1.37) \quad (1.38)$$

Аналогичным образом вводятся следующие понятия:

- коэффициент пространственной корреляции (рис.1.14)

$$R_{uu}(r_1) = \frac{B_{uu}(r_1)}{B_{uu}(0)}; \quad (1.38) \quad (1.39)$$

- пространственный микромасштаб λ_1

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_{uu}(r_1)}{\partial r_1^2} \right]_{r_1=0} \quad (1.39) \quad (1.40)$$

- пространственный макромасштаб (интегральный масштаб)

$$\Lambda_1 = \int_0^{\infty} R_{uu}(r_1) dr_1. \quad (1.40) \quad (1.41)$$

Рассматривая коэффициенты корреляции $R_{uu}(r_2)$ и $R_{uu}(r_3)$, приходим соответственно к пространственным масштабам λ_2 , Λ_2 и λ_3 , Λ_3 .

Физический смысл пространственного микромасштаба λ_i заключается в том, что эта величина имеет порядок характерного размера (вдоль оси x_i) мелкомасштабных

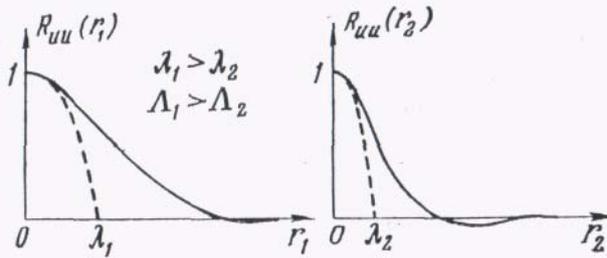


Рис. 1.13

Рис.1.14

структурных неоднородностей случайного поля.

Пространственный макромасштаб Λ_i характеризует в среднем размеры крупных неоднородностей поля в направлении соответствующей оси x_i .

В однородных полях коэффициенты пространственной корреляции и масштабы вдоль разных осей координат, вообще говоря, могут быть разными.

Если скалярное поле однородно и изотропно, то, как нетрудно показать [2], пространственная корреляционная функция $B_{uu}(\mathbf{r})$ зависит только от модуля вектора \mathbf{r} , но

не от направления: $B_{uu}(\mathbf{r}) = B_{uu}(r)$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda$.

Чем больше масштабы Λ и λ различаются по величине, тем, очевидно, шире спектр пространственных неоднородностей случайного поля.

1.5. Моменты случайного векторного поля

До сих пор мы рассматривали статистические характеристики скалярных случайных полей. Переходим к изучению векторных случайных полей, наиболее интересным примером которых, разумеется, служит поле скорости $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ в турбулентном потоке. Задание векторного поля эквивалентно заданию трех полей проекций вектора \mathbf{U} на оси декартовой системы координат:

$$U_1 = U_1(\mathbf{x}, t); \quad U_2 = U_2(\mathbf{x}, t); \quad U_3 = U_3(\mathbf{x}, t).$$

В отношении поля $U_i(x_j, t)$ можно повторить почти все рассуждения, которые приведены выше применительно к скалярному полю $u(x_j, t)$, и ввести для векторного поля те же характеристики. Однако надо помнить следующее: Во-первых, поле $U_i(x_j, t)$ в отличие от скалярных полей изменяется при вращениях осей системы координат. Поэтому выводы о свойствах изотропного скалярного поля нельзя автоматически переносить на векторные поля.

Во-вторых, компоненты U_1 , U_2 и U_3 в каждой точке пространства связаны уравнением неразрывности. Для несжимаемой жидкости (мы будем рассматривать только этот случай) уравнение неразрывности имеет вид

$$\partial U_j / \partial x_j = 0. \quad (1.41) \quad (1.42)$$

Уравнение (1.42) накладывает некоторые дополнительные условия на статистические характеристики турбулентного поля скорости.[2].

После этих предварительных замечаний рассмотрим некоторые моменты случайного турбулентного поля скорости.

1.5.1. Одноточечные моменты поля скорости

Математическое ожидание $\bar{U}_i(x_j, t)$ есть не что иное, как осредненная скорость турбулентного течения в точке. Для стационарного пристенного турбулентного течения распределение осредненной скорости удовлетворительно описывается универсальным «законом стенки» $\varphi = \varphi(\eta)$, где $\varphi = U_1/u_*$, $\eta = x_2 u_*/\nu$, $u_* = \sqrt{\tau_c/\rho}$ (рис. 1.15). Представим актуальное значение скорости как сумму осредненной и пульсационной компонент

$$U_i = \bar{U}_i + u_i \tag{1.42} \tag{1.43}$$

Интенсивностью пульсаций i -й компоненты скорости называют положительное значение квадратного корня из дисперсии: $\sigma_{u_i} = \sqrt{\sigma_{u_i}^2} = \sqrt{u_i^2}$. На рис.1.16 приведены графики интенсивности продольной, радиальной и тангенциальной компонент пульсаций скорости в пристенной области турбулентного потока в трубе. Интенсивности пульсаций отнесены к динамической скорости u_* . Как видно, поведение различных компонент пульсаций вблизи стенки существенно различно. Интенсивность

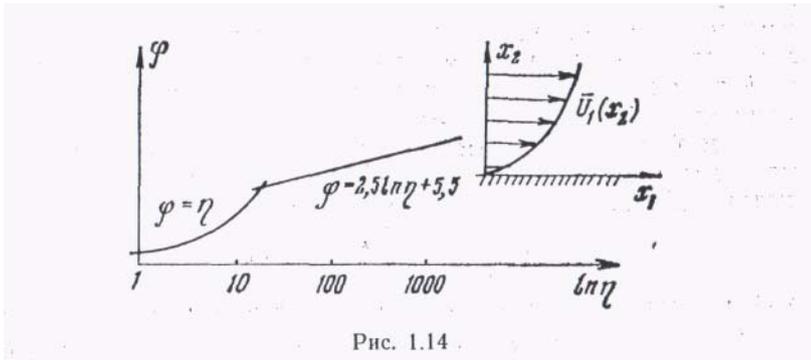


Рис. 1.14

Рис.1.15

продольных пульсаций σ_{u_1} , возрастая от стенки в направлении ядра потока, проходит ярко выраженный максимум, расположенный в переходной области (по Карману, переходная область лежит в интервале значений безразмерной координаты $5 < \eta < 30$), а затем снижается, так, что вблизи оси трубы, по данным большинства авторов, $\sigma_{u_1} \approx (0,8 - 1,0) \cdot u_*$. (Приосевая зона течения, соответствующая большим значениям координаты $\eta = x_2 u_*/\nu$, на рис. 1.16 не показана). Радиальная компонента

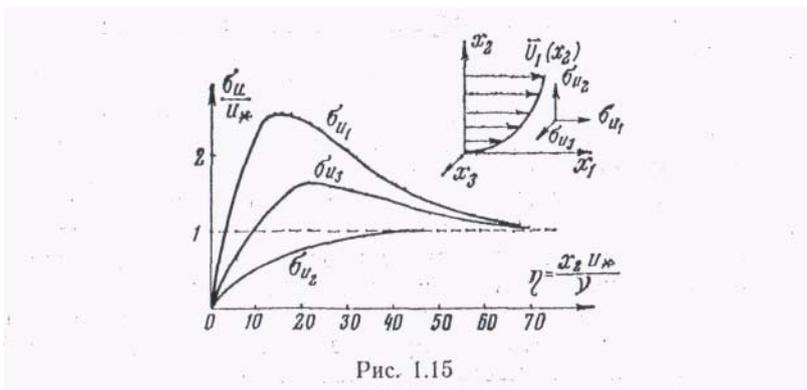


Рис. 1.15

Рис.1.16

σ_{u_1} , увеличиваясь по мере удаления от стенки, достигает величины $\sigma_{u_1} \approx u_*$, а затем в направлении оси несколько снижается, приближаясь к значению $\sigma_{u_1} \approx 0,8 u_*$. График интенсивности тангенциальной компоненты занимает промежуточное положение между σ_{u_1} и σ_{u_2} . Такой характер изменения интенсивности пульсаций свидетельствует о том, что вблизи стенки поле турбулентных пульсаций существенно неоднородно и анизотропно. Вместе с тем, вблизи оси пульсационное поле становится более однородным, а примерное равенство $\sigma_{u_1} \approx \sigma_{u_2} \approx \sigma_{u_3}$ в этой зоне потока указывает на приближение пульсационного поля скорости к изотропному.

Отметим, что динамическая скорость является очень удачным масштабом интенсивности пульсаций пристенного потока. Действительно, вблизи стенки

$$u_*^2 = \frac{\tau_c}{\rho} \approx \frac{\rho \overline{u_1 u_1}}{\rho} \approx \sigma_{u_1} \cdot \sigma_{u_2}$$

1.5.2. Корреляционные функции поля турбулентных пульсаций скорости

Автокорреляционная функция для каждой из компонент пульсаций скорости может быть введена аналогично тому, как это было сделано выше для пульсаций скалярной примеси. Так же определяются коэффициенты автокорреляции, временные макро- и микромасштабы. Читателю не составит труда самостоятельно сформулировать основные свойства автокорреляционной функции $B_{11}(\tau) = \overline{u_1(t)u_1(t+\tau)}$, $B_{22}(\tau)$ или $B_{33}(\tau)$ стационарных пульсаций скорости и построить характерные графики этих функций.

Пространственные корреляционные функции пульсационного поля скорости.

Пространственная корреляционная функция вида

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t)} \tag{1.43} \tag{1.44}$$

устанавливает статистическую связь между i -й компонентой пульсационной скорости в точке (пространства с координатой \mathbf{x} и j -й компонентой в точке $(\mathbf{x}+\mathbf{r})$ (рис. 1.17, а). Поскольку в выражении (1.44) индексы могут принимать значения $i, j=1, 2$ и 3 , то (1.44) представляет собой общее выражение любой компоненты тензора второго ранга типа «диада» [13], называемого *тензором пространственных корреляций поля скорости*. В общем случае компоненты этого тензора зависят от координаты \mathbf{x} и пространственного сдвига \mathbf{r} между точками, а для нестационарных полей - и от времени:

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t)} = \begin{pmatrix} B_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t); B_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t); B_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \\ B_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t); B_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t); B_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \\ B_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t); B_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t); B_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \tag{1.44} \tag{1.45}$$

Каждая из компонент данного тензора представляет собой пространственную корреляционную функцию. Так, диагональные компоненты B_{11}, B_{22}, B_{33} - это корреляционные функции одноименных компонент пульсаций скорости. В

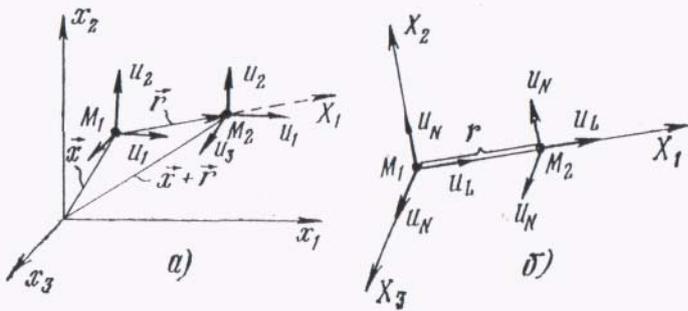


Рис. 1.16

Рис.1.17

этих функций можно было бы повторить те же рассуждения, которые мы провели выше в п. 1.4.3, говоря о пространственных корреляциях скалярных полей. Например, очевидно, что значения этих функций при $\mathbf{r}=0$ суть дисперсии $\sigma_{u_1}^2, \sigma_{u_2}^2, \sigma_{u_3}^2$ соответствующих компонент скоростных пульсаций в точке пространства с координатой \mathbf{x} . Что касается компонент тензора B_{ij} при $i \neq j$, то это пространственные *взаимно корреляционные* функции, свойства которых кардинально отличны от свойств «обычных» корреляционных функций, изученных нами ранее. Например, значения взаимно корреляционных функций при $\mathbf{r}=0$ не только не являются максимальными значениями этих функций, но могут быть равны нулю или даже отрицательными (более подробно см. [2]). Поскольку речь зашла о значениях пространственных корреляционных функций B_{ij} при $\mathbf{r}=0$, подчеркнем, что эти одноточечные

корреляции определяют хорошо знакомые читателю из курса механики жидкости *турбулентные напряжения Рейнольдса*. Действительно, соотношение между тензором рейнольдсовых напряжений τ_{ij} и тензором пространственных корреляций пульсаций скорости B_{ij} таково:

$$\tau_{ij}(x) = \overline{\rho u_i u_j} = \rho B_{ij}(x, 0) = \begin{pmatrix} \overline{\rho u_1 u_1}; & \overline{\rho u_1 u_2}; & \overline{\rho u_1 u_3} \\ \overline{\rho u_2 u_1}; & \overline{\rho u_2 u_2}; & \overline{\rho u_2 u_3} \\ \overline{\rho u_3 u_1}; & \overline{\rho u_3 u_2}; & \overline{\rho u_3 u_3} \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Элементы главной диагонали $\overline{\rho u_1 u_1}$, $\overline{\rho u_2 u_2}$, $\overline{\rho u_3 u_3}$ - нормальные напряжения, остальные компоненты $\overline{\rho u_1 u_2} = \overline{\rho u_2 u_1}$; $\overline{\rho u_1 u_3} = \overline{\rho u_3 u_1}$; $\overline{\rho u_2 u_3} = \overline{\rho u_3 u_2}$ - касательные турбулентные напряжения. Заметим, что тензор τ_{ij} , очевидно, является симметричным, однако тензор B_{ij} при $r \neq 0$ свойством симметрии, вообще говоря, не обладает.

Если векторное поле $U(x, t)$ является однородным, то осредненная скорость \bar{U}_i одинакова в каждой точке пространства, как и любой другой одноточечный момент; тензор пространственных корреляций также является симметричным

$$B_{ij}(x, r) = B_{ij}(r)$$

Если поле скорости является однородным и изотропным, то это поле удовлетворяет ряду важных дополнительных условий:

1) осредненная скорость \bar{U}_i не только одинакова в каждой точке пространства, но и равна нулю, т.е. изотропное поле является чисто пульсационным:

2) интенсивности компонент пульсаций скорости одинаковы: $\sigma_{u_1} = \sigma_{u_2} = \sigma_{u_3} = \sigma_u$;

3) можно сделать интересные выводы в отношении тензора $B_{ij}(r)$. Мы помним, что пространственная корреляционная функция скалярного изотропного поля зависит только от модуля вектора r , но не от его направления, т.е. $B_{uu}(r)$. В случае векторного изотропного поля аналогичный вывод в отношении тензора $B_{ij}(r) = \overline{u_i(x) u_j(x+r)}$ был бы неверным. Компоненты тензора B_{ij} в изотропной турбулентности продолжают зависеть и от величины, и от направления вектора r . Однако, как показано в [2,3], изотропия придает тензору $B_{ij}(r)$ новое свойство - он становится симметричным:

$$B_{ij}(r) = B_{ji}(r). \quad (1.46) \quad (1.47)$$

Нетрудно найти главные оси этого симметричного тензора [2]. Одна из главных осей (обозначим ее X_1) совпадает по направлению с радиусом-вектором r (рис. 1.17,б), т.е. ее положение в пространстве строго фиксировано: она проходит через точки M_1 и M_2 . Положение двух других осей X_2 и X_3 в плоскости, перпендикулярной X_1 , может быть любым, образующим декартову правовинтовую тройку векторов. Из общих свойств симметричного тензора следует, что в системе главных осей координат компоненты тензора $B_{ij}(r) = 0$ при $i \neq j$. Отличны от нуля только «главные значения» тензора - компоненты при $i = j$: так называемая «продольная корреляционная функция» (рис.1.17,б)

$$B_{LL}(r) = \overline{u_1(x) u_1(x+r)} \quad (1.47a) \quad (1.48a)$$

и две одинаковые «поперечные корреляционные функции»

$$B_{NN}(r) = \overline{u_2(x) u_2(x+r)}, \quad (1.47б) \quad (1.48б)$$

$$B_{NN}(r) = \overline{u_3(x) u_3(x+r)}. \quad (1.47в) \quad (1.48в)$$

Здесь индексы L и N означают проекции на направление r и соответственно на какое-либо перпендикулярное r направление [2].

Таким образом, в главной системе координат матрица тензора пространственных корреляций пульсаций скорости в изотропной турбулентности имеет вид

$$B_{ij}(r) = \begin{pmatrix} B_{LL}(r) & 0 & 0 \\ 0 & B_{NN}(r) & 0 \\ 0 & 0 & B_{NN}(r) \end{pmatrix}. \quad (1.48) \quad (1.49)$$

В соответствии с общими свойствами симметричных тензоров [13], зная главные значения $B_{LL}(r)$ и $B_{NN}(r)$, можно определить компоненты тензора $B_{ij}(r)$ в произвольной системе координат $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = [B_{LL}(r) - B_{NN}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + B_{NN}(r) \delta_{ij}, \quad (1.49) \quad (1.50)$$

где $\delta_{ij}=1$ при $i=j$; $\delta_{ij}=0$ при $i \neq j$, а r_i, r_j — компоненты вектора \mathbf{r} в рассматриваемой системе координат. Таким образом, проблема исследования тензора пространственных корреляций в изотропной турбулентности существенно упрощается, поскольку она может быть сведена к определению всего двух компонент-главных значений $B_{LL}(r)$ и $B_{NN}(r)$.

Если рассматривается изотропная турбулентность в несжимаемой жидкости, то, используя уравнение неразрывности (1.42), можно получить [2] взаимно-однозначное соотношение между продольной $B_{LL}(r)$ и поперечной $B_{NN}(r)$ корреляционными функциями; следовательно, любой из них оказывается достаточно для полного определения тензора $B_{ij}(\mathbf{r})$ (см. формулу (1.50)). Полезно знать, что в несжимаемой жидкости между продольными макро- и микромасштабами Λ_L и λ_L , с одной стороны, и поперечными масштабами Λ_N и λ_N , с другой, справедливы следующие соотношения [2]:

$$\Lambda_L = 1/2 \Lambda_N; \quad \lambda_L = \sqrt{2} \lambda_N. \quad (1.51) \quad (1.52)$$

Предлагаем читателю представить себе и изобразить на графике в одном масштабе примерный вид функций $B_{LL}(r)$ и $B_{NN}(r)$, учитывая соотношения (1.51) и очевидное соотношение $B_{LL}(0) = B_{NN}(0) = \sigma_u^2$.

1.6. Нормальный (гауссов) закон распределения

Выше мы рассмотрели некоторые наиболее простые моменты гидродинамических полей. Вообще говоря, для полного описания случайного поля необходимо задание всех моментов различных типов и порядков. Иное дело, если случайное поле является гауссовым, т. е. подчиняется нормальному закону распределения вероятности.

Напомним, что одномерная плотность вероятности в случае нормального закона распределения имеет вид

$$\rho(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(u-\mu_u)^2}{2\sigma_u^2}}. \quad (1.51) \quad (1.52)$$

Множитель перед экспонентой получен из условия нормировки. Как видно, аналитическое выражение функции $\rho(u)$ определяется только двумя одноточечными моментами - математическим ожиданием μ_u и дисперсией σ_u^2 . В свою очередь, зная $\rho(u)$, мы можем в соответствии с (1.4) определить любой одноточечный момент. Следовательно, математическое ожидание и дисперсия полностью определяют нормальный случайный процесс в данной точке. Этот вывод является отражением общего свойства гауссовых случайных полей, в соответствии с которым любая N-мерная плотность вероятности такого поля определяется совокупностью моментов не старше второго порядка, однако плотность вероятности определяет все моменты высших порядков и другие статистические характеристики. (Мы не приводим довольно громоздкие выражения для N-мерной гауссовой плотности вероятности, поскольку оно нам в дальнейшем не понадобится.) Понятно, сколь важен вопрос: относится ли турбулентное поле к классу гауссовых случайных полей? По-видимому, ответ на этот вопрос не однозначен. Во многих работах, обзор которых содержится в [6], этот вопрос исследовался экспериментально для конкретных течений. Если имеется техническая возможность, следует измерить плотность вероятности $\rho(u)$ в различных точках потока и сопоставить с графиком функции (1.52). Часто в качестве меры отклонения плотности вероятности от нормального закона используют коэффициент асимметрии A и коэффициент эксцесса E , которые были введены выше выражениями (1.21) и (1.22). Для гауссовых процессов $A = 0$, $E = 3$. Эти равенства являются необходимыми, но не достаточными признаками нормального процесса. Все же при их выполнении есть основание принять допущение о том,

что данный процесс близок к гауссовому. Рис.1.18, а, б иллюстрирует связь величины

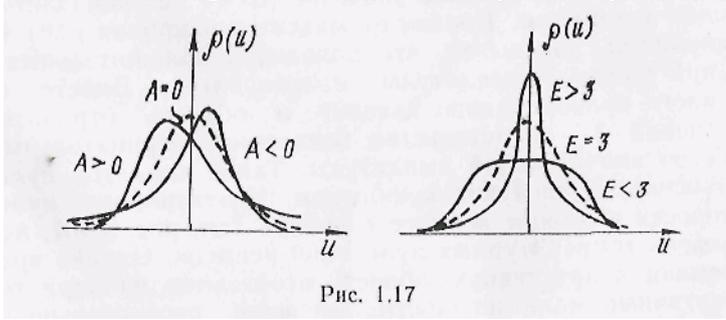


Рис. 1.17

Рис.1.18

коэффициентов A и E с формой кривой плотности вероятности. Для примера рассмотрим рис.1.19, на котором приведены осциллограммы и кривые плотности вероятности пульсаций температуры при турбулентном течении воды в обогреваемой трубе. По-видимому, пульсационный процесс вблизи оси близок к гауссовому (рис.1.19, а). Пульсационный процесс вблизи стенки в пределах вязкого

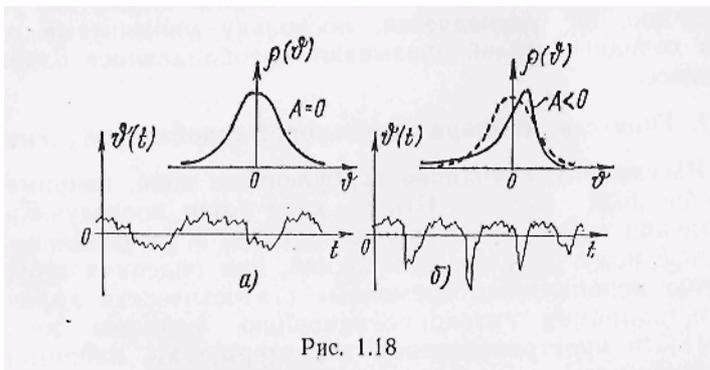


Рис. 1.18

Рис.1.19

подслоя этим свойством, без сомнения, не обладает. Как видно на рис.1.19,б, процесс характеризуется отрицательной асимметрией. На осциллограмме процесса это проявляется в том, что наблюдаемые большую часть времени положительные пульсации невысокой интенсивности прерываются мощными выбросами в отрицательную область. (Следует подчеркнуть, что мы рассматриваем центрированный процесс $\vartheta(i)$, т.е. $\mu_0 = \bar{\vartheta}$.) Соответствующая кривая плотности вероятности существенно отличается от гауссовой. Она асимметрична, причем максимум сдвинут в положительную область значений аргумента, т. е. среднее значение $\mu_0 = \bar{\vartheta}$ не совпадает с наиболее вероятным. Вправо от максимума кривая $\rho(\vartheta)$ быстро снижается, показывая, что появление положительных пульсаций большой амплитуды маловероятно. Вместе с тем «хвост» кривой далеко заходит в область отрицательных значений ϑ - свидетельство появления отрицательных выбросов значительной амплитуды. Такой характер пульсаций объясняется следующим образом. Интенсивность пульсаций скорости в вязком подслое невелика (см. рис.1.16), поэтому уровень температурных пульсаций невысок. Однако время от времени в пристенную область вторгаются из ядра течения энергичные молекулы жидкости, имеющие относительно более низкую температуру, чем температура у обогреваемой стенки. Отсюда резкие отрицательные пульсации на осциллограмме пульсаций температуры. Известно, что случайный процесс отвечает нормальному закону, если он является результатом одновременного воздействия большого числа независимых случайных факторов, ни один из которых не является существенно преобладающим. У стенки это условие, очевидно, не соблюдается, поскольку упомянутые вторжения холодных молекул оказывают преобладающее влияние на процесс.

1.7. Коэффициент пространственно-временной корреляции.

Гипотеза Тэйлора о «замороженной» турбулентности

Рассмотрим случайное турбулентное поле, например векторное поле скорости $\mathbf{U}(x, t)$, хотя наши последующие рассуждения могут быть распространены и на скалярные случайные поля. Как мы установили, для описания этого поля можно использовать временные статистические характеристики, например автокорреляционную функцию пульсации $B_{uu}(\tau)$, и пространственные характеристики, например пространственные корреляционные функции $B_{ij}(r)$. Возникает вопрос: можно ли по временным осциллограммам случайного процесса в точке судить о пространственной структуре случайного поля, и наоборот? Оказывается, положительный ответ на этот вопрос можно дать только при выполнении определенных условий. Разобраться в этом поможет следующая простая аналогия. Рассмотрим работу обычного магнитофона. Магнитная лента с записью некоторого процесса $u(x_1)$ (x_1 - координата вдоль ленты) протягивается с постоянной скоростью \bar{U}_1 через точку M , в которой расположена чувствительная магнитная головка (рис.1.20,а). В точке M головка воспринимает пространственную запись $u(x_1)$, как переменный процесс $u(t)$,

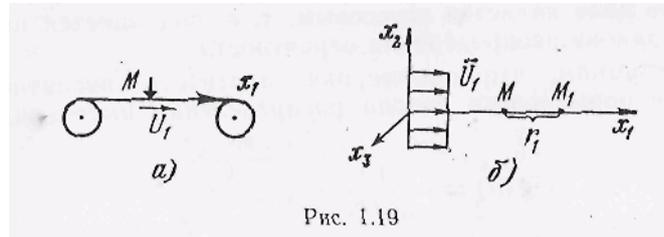


Рис. 1.19

Рис.1.20

который затем, пройдя акустическую систему, воспринимается нами на слух. Не трудно понять, что в данном случае между пространственной осциллограммой $u(x_1)$ и временной осциллограммой $u(t)$ существует жесткая пропорциональная связь, причем коэффициент пропорциональности - скорость протяжки \bar{U}_1 :

$$\frac{du}{dt} = -\bar{U}_1 \frac{du}{dx_1}. \quad (1.52) \quad (1.53)$$

Появление знака «минус» легко уяснить из тех соображений, что, перемещая магнитную ленту вдоль оси x_1 , мы протягиваем осциллограмму $u(x_1)$ через точку M «задом наперед», т. е. в направлении от больших значений x_1 к меньшим.

Вернемся к турбулентности. Рассмотрим турбулентное течение, подчиняющееся следующим условиям:

1. Поле скорости однородно. Это означает, что осредненная скорость в любой точке одинакова. Считая, что осредненное течение направлено вдоль оси x_1 (рис. 1.19,б), имеем $\bar{U}_1 = const$, $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0$.

2. Поле скорости стационарно.

3. Уровень турбулентных пульсаций мал по сравнению с осредненной скоростью: $\sigma_{u_1} \ll \bar{U}_1$; $\sigma_{u_2} \ll \bar{U}_1$; $\sigma_{u_3} \ll \bar{U}_1$ (пульсационное поле имеет три компоненты!).

Запишем уравнение Навье-Стокса для i -й компоненты пульсаций

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

или

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\bar{U}_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Ввиду малости пульсаций скорости и с учетом того, что пульсации давления $p \sim \rho u^2$ также малы, делаем вывод, что первое слагаемое правой части последнего уравнения велико по сравнению с тремя остальными. Тогда для рассматриваемого турбулентного течения при выполнении вышеуказанных условий справедливо

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\bar{U} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \quad (1.53)$$

(1.54)

Сопоставляя полученное соотношение с (1.53) и привлекая аналогию с магнитофоном, делаем вывод, что временной процесс $u_i(t)$ в некоторой точке M (рис.1.20, б) есть результат «протаскивания» через эту точку со скоростью \bar{U}_1 пространственной пульсационной структуры $u_i(x_1)$. Причем структурные образования турбулентного поля в процессе их движения через точку M практически не успевают измениться, оставаясь, по образному выражению Дж. Тэйлора, «замороженными». Приведенные рассуждения составляют содержание так называемой гипотезы Тэйлора о «замороженной» турбулентности. Формула (1.54) есть математическое выражение этой гипотезы, а вышеуказанные условия (стационарное однородное течение с низким уровнем турбулентных пульсаций) определяют область применимости этой гипотезы. Из (1.54) нетрудно получить соотношение между автокорреляционной функцией пульсаций в точке M и пространственной корреляционной функцией аргумента r_1 — пространственного сдвига между точками M и M_1 вдоль оси x_1 , т. е. в направлении осредненного движения:

$$B(\tau) = B(r_1), \quad (1.54)$$

где $r_1 = \tau \bar{U}_1$. (1.55)

Сформулированные выше условия применимости гипотезы Тэйлора о «замороженной турбулентности» на практике всегда выполняются с некоторым приближением. Причем, насколько выполняются в реальном течении условия замороженности, можно проверить только опытным путем. Рассмотрим однородное турбулентное поле с постоянной осредненной скоростью U (рис.1.21).

Рис.1.21

Ось x декартовой системы координат направим вдоль U . Возьмем на оси x две точки $-M_1$ и M_2 . При этом положение точки M_1 фиксировано, а точка M_2 может перемещаться относительно M_1 вдоль оси x . Пусть расстояние между точками равно r ($r=0$ означает, что точки M_1 и M_2 совпадают). Поместим в точки M_1 и M_2 миниатюрные малоинерционные датчики некоторой пульсационной величины $u(t)$. В роли $u(t)$ может выступать одна из компонент турбулентных пульсаций скорости, либо пульсации температуры или какой-либо другой скалярной примеси в турбулентном потоке; для дальнейшего рассмотрения это не имеет значения. Напомним, что процесс $u(t)$ — пульсационный, то есть центрированный: $u(t)=0$.

Если процесс в точке M_1 обозначить $u(t,x)$, то процесс в точке M_2 будет $u(t,x-r)$. Введем в измерительную линию второго датчика задержку сигнала по времени τ (рис.1.21), а затем перемножим сигналы датчиков и проинтегрируем результат. Тем самым мы осуществим алгоритм вычисления коэффициента пространственно-временной корреляции

$$R(\tau, r) = \frac{1}{\sigma_u^2 T} \int_0^T u(t, x) u(t + \tau, x - r) dt \quad (1.56)$$

В формуле (1.56) использовано то обстоятельство, что дисперсия σ_u^2 одинакова в точках M_1 и M_2 , поскольку поле $u(t,x)$ однородно.

Будем придавать пространственному сдвигу r различные значения, перемещая точку M_2 относительно неподвижной точки M_1 . Построим семейство кривых $R(\tau,r)$, соответствующих разным расстояниям между точками (рис.1.22). При этом рассмотрим две ситуации.

Рис.1.22

Ситуация 1 (идеализированная): турбулентное поле полностью заморожено, то есть гипотеза Тэйлора строго выполняется (рис.1.22,а).

Очевидно, что при $r=0$ (точки M_1 и M_2 совпадают) выражение (1.56) дает коэффициент автокорреляции (кривая 0 на рис.1.22,а):

$$R(\tau) = \frac{1}{\sigma_u^2 T} \int_0^T u(t,x)u(t+\tau,x)dt \quad (1.57)$$

Максимум кривой коэффициента автокорреляции естественно находится при $\tau=0$: $R(0)=1$.

Пусть теперь $r=r_1$. Поскольку мы считаем, что поле величины u заморожено, то «по дороге» от точки M_2 до точки M_1 никаких изменений этого поля происходить не будет. Нетрудно понять, что при этом координата $\tau_1 = r_1/U$, будет соответствовать максимуму на кривой $R(\tau,r)$, причем значение максимума равно единице – $R(r_1,\tau_1) = 1$ (сохраняется 100%-ная корреляция, поскольку поле заморожено!). Очевидно, что временной сдвиг τ_1 численно равен тому времени, которое необходимо замороженному полю u , чтобы преодолеть расстояние от точки M_2 до точки M_1 , двигаясь со скоростью U .

Придавая расстоянию r значения r_2, r_3 и т.д., мы будем получать графики той же формы, но с различными значениями координат максимумов τ_2, τ_3 и т.д. По сути все эти кривые представляют собой кривую автокорреляционной функции, перемещаемую на соответствующие значения временного сдвига вдоль оси τ . При этом величина максимальной корреляции остается равной единице.

Ситуация 2 (реальная): турбулентное поле u не заморожено, то есть «по дороге» от точки M_2 к точке M_1 в нем происходят некоторые изменения, вследствие чего корреляция уже не может быть 100%-ной. рассмотрим рис.1.22,б.

Кривая 0 (точки M_1 и M_2 совпадают) – это просто автокорреляционная функция. Она ничем не отличается от кривой соответствующей кривой на рис.1.22,а. Остальные кривые $R(\tau,r)$ заметно отличаются от соответствующих графиков на рис.1.22,а. Во первых, максимумы кривых

размываются, корреляция убывает вследствие изменчивости случайного поля. Во вторых, уже не является очевидным, что координаты максимумов кривых τ_i строго равны отношению r_i/U . То есть возникает сомнение в том, что скорость конвективного переноса структурных образований поля u вдоль оси x в точности равна осредненной скорости потока U . (На рис. 1.22,б это сомнение выражено в форме приближенных равенств $\tau_i \approx r_i/U$).

Не вдаваясь в подробности этого вопроса, сформулируем резюме: опытным путем можно подобрать оптимальное расстояние r между точками M_1 и M_2 , при котором для координаты максимума равенство $\tau = r/U$ выполняется с высокой степенью точности.

Как показали специально выполненные экспериментальные исследования, для статистических характеристик гипотеза Тэйлора вполне удовлетворительно соблюдается на весьма значительных временных и пространственных интервалах. Практическая значимость гипотезы Тэйлора очевидна. Действительно, современный уровень техники позволяет без особых трудов измерить автокорреляционную функцию в точке. Вместе с тем измерение пространственных корреляционных функций вдоль потока зондовыми методами весьма затруднительно, поскольку датчик пульсаций в точке M_1 находится в следе за датчиком точки M_2 . Поэтому использование формулы (1.57), несмотря на ее приближенность, может дать выигрыш в точности по сравнению с прямыми измерениями функции $B(r_1)$.

Кроме того, использование гипотезы Тэйлора о «замороженной турбулентности» открывает возможность создания корреляционных измерителей локальной осредненной скорости и корреляционных расходомеров в турбулентных протоках. Известны случаи, когда подобные статистические методы измерения скорости и расхода являются единственно возможными – например, при течении жидкометаллических теплоносителей в сильных магнитных полях.

Вернемся к рис. 1.22,б. Жирная пунктирная линия на рисунке, огибающая вершины корреляционных кривых, исходит из единицы и по мере увеличения τ стремится к нулю. Она делит единичный отрезок, соответствующий 100% корреляции, на две части. Верхняя часть, которую мы назовем «степень изменчивости» - СИ показывает, что по мере увеличения расстояния между точками M_2 и M_1 корреляция убывает. Нижняя часть – «степень замороженности» - СЗ показывает то, что следует из ее названия, то есть степень выполнения гипотезы Тэйлора о «замороженной турбулентности». При увеличении расстояния r между точками M_2 и M_1 максимумы корреляционных кривых все более размываются, и пунктирная кривая приближается к оси абсцисс. Уменьшений корреляции между точками наблюдения до нуля означает, что переносимые потоком структурные неоднородности (вихри, моли), наблюдаемые в точке M_2 , «по дороге» до точки M_1 успевают потерять свою индивидуальность (рассыпаться, диссипировать и т.д.) – все из них, даже наиболее долго живущие! Таким образом пунктирную линию можно трактовать как «линию жизни» долго живущих структурных образований рассматриваемого случайного поля u . В турбулентном поле скорости эта линия представляет собой «линию жизни» наиболее крупных вихревых образований, которые, как известно, существуют дольше, чем мелкие вихри. Экспериментаторы неоднократно отмечали, что крупный вихрь, обнаруженный на входе длинной трубы, переносимый потоком, может быть обнаружен на выходе из трубы.

2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ И СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

При экспериментальном и теоретическом исследовании турбулентности широко используются методы спектрального анализа, основанные на представлении рассматриваемых сигналов в виде разложений в ряды по гармоническим функциям—ряды Фурье. Эти методы, как будет показано ниже, применимы только к анализу стационарных процессов и однородных полей.

2.1. Разложение в ряд Фурье детерминированных сигналов

Кратко напомним основные сведения из теории рядов Фурье. Любую конечно-гладкую функцию $u(t)$, заданную на интервале $[0, T]$, или, что то же самое, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + i b_k \sin \omega_k t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.1)$$

где частоты ω_k , образуют бесконечный дискретный ряд

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T} k,$$

а коэффициенты разложения - амплитуды A_k - могут быть найдены с использованием свойства ортогональности гармонических функций на интервале $[0, T]$ по формулам обратного преобразования Фурье:

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad (2.2)$$

Осредненное значение квадрата рассматриваемого сигнала, как об этом говорилось выше, обычно трактуют как энергию сигнала. При исследовании поля скорости величина $\overline{u^2(t)}$, действительно, отличается от кинетической энергии турбулентного движения на постоянный множитель $\rho/2$. Тогда квадраты амплитуд гармоник (при комплексном представлении произведение амплитуды на комплексно сопряженную величину)

$$A_k A_k^* = a_k^2 + b_k^2 \quad (2.3)$$

представляют собой энергии отдельных гармоник, причем выполняется физически очевидное соотношение

$$\overline{u^2(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k A_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \quad (2.4)$$

т. е. энергия рассматриваемого сигнала равна сумме энергий образующих его гармоник.

Если построить график, на котором каждой частоте ω_k сопоставлено значение соответствующей этой

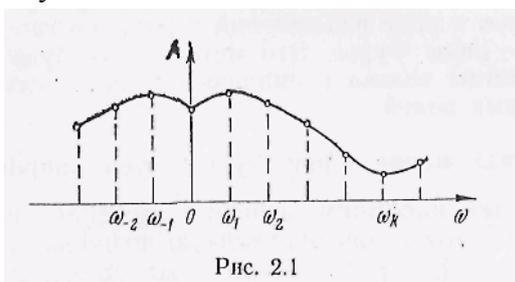


Рис.2.1

гармонике энергии, то мы получим спектр анализируемой функции (рис. 2.1).

Спектр анализируемого сигнала - распределение амплитуд или энергий по частотам - дает ясную характеристику исследуемого физического процесса.

Описанный выше метод спектрального анализа можно распространить и на непериодические функции при условии, что они «достаточно быстро» убывают на бесконечности. При этом формулы прямого и обратного интегрального Фурье-преобразования имеют вид

$$u(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.5)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.6)$$

К сожалению, сигналы, получаемые при исследовании стационарных процессов и однородных турбулентных полей, не являются убывающими, и приведенные выше формулы неприменимы для их анализа.

Однако случайный характер турбулентных процессов позволяет осуществить их Фурье-разложение специального вида.

2.2. Спектральный анализ случайного стационарного процесса

2.2.1. Спектральное представление стационарного, случайного процесса

Рассмотрение математического аппарата, используемого при спектральном анализе случайных процессов $u(x, t)$, удобно начать с рассмотрения скалярного процесса, информация о котором получается в фиксированной точке пространства $u(x_0, t)$. Для краткости не будем указывать аргумент x_0 . Пусть на интервале $[0, T]$ получено N центрированных реализаций стационарного случайного процесса — $u(t)$. Если сигнал не центрирован, надо вместо $u(t)$ рассматривать $u'(t) = u(t) - \bar{u}(t)$.

Представим функцию $u(t)$ в виде

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{i\omega_k t} \quad (2.7)$$

где $\omega_k = \frac{2\pi}{T} k$ — круговая частота. При рассмотрении случайных процессов

комплексные амплитуды будем обозначать Z_k . Поскольку $u(t)$ — случайный процесс, т. е. все конкретные его реализации отличаются друг от друга, то и комплексные амплитуды Z_k являются случайными величинами, т. е. каждая амплитуда Z_k случайным образом меняется от реализации к реализации (но для каждой реализации принимает вполне конкретное комплексное значение).

Разложение функции $u(t)$ в ряд (2.7) позволяет получить ценную информацию о распределении энергии рассматриваемого процесса по частотам. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Из повседневной практики известно, что энергия (дисперсия) процесса $u^2(t)$ заключена в некотором диапазоне частот или содержится на каких-то дискретных частотах. Например, аудиосистема высокого класса ($H_i - F_i$) генерирует звуковые сигналы в диапазоне частот примерно 20 Гц — 20 кГц, что перекрывает диапазон частот, воспринимаемых человеческим ухом (обычно 40 Гц — 16 кГц). Струна музыкального инструмента звучит на дискретной частоте (гармонике).

Спектр процесса $u(t)$ можно измерить следующим образом (более подробно см. гл.4). Пропустим исследуемый сигнал через полосовой фильтр — узкополосный усилитель с полосой пропускания Δf , настроенный на частоту f . (рис.2.2)

Рис. 2.2

Здесь $u(t, f, \Delta f)$ — сигнал на выходе фильтра. Дисперсия этого процесса

$$\sigma_u^2(f, \Delta f) = u^2(t, f, \Delta f) = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t, f, \Delta f) dt \quad (2.8)$$

Меняя частоту настройки f , определяем зависимость $\sigma_u^2(f, \Delta f)$ от частоты f и находим ту область частот, в которой энергия анализируемого процесса отлична от нуля.

Спектральную плотность энергии процесса $E(f)$ определим как (см. (2.8)):

$$E(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\sigma_u^2(f, \Delta f)}{\Delta f} \approx \frac{\sigma_u^2(f, \Delta f)}{\Delta f} \quad (2.9)$$

Очевидно, что спектральная плотность – это функция, которая показывает, как энергия процесса распределена по частотам. Очевидно, также, что

$$u^2(t) = \int_0^{\infty} E(f) df$$

Качественно, распределение энергии по частотам иллюстрируется графиком, изображенным на рис.2.3.

Рис.2.3.

Заметим, что величина $E(f)$ – не энергия, а, именно, плотность энергии, то есть энергия отнесенная к диапазону частот.

Приведенные нами рассуждения о спектральной плотности $E(f)$ являются несколько упрощенными. Однако очевидно, что спектральный анализ может оказаться весьма полезным при исследовании физики турбулентности. Для этого необходимо создать строгий математический аппарат спектрального анализа.

Вернемся к анализу выражения (2.7).

Рассмотрим, какими свойствами должны обладать амплитуды Z_k .

1. Прежде всего из условия центрированности процесса следует очевидное свойство

$$\bar{Z}_k = 0. \quad (2.8) \quad | \quad (2.10)$$

2. Так как процесс $u(t)$ вещественный, то сумма в правой части выражения (2.7) должна распадаться на m комплексно-сопряженных пар ($n=2m$) вида $(Z_k e^{i\omega_k t}, Z_k^* e^{-i\omega_k t})$, а само выражение (2.7) в этом случае может быть представлено в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^m (Z_k^{(1)} \cos \omega_k t + Z_k^{(2)} \sin \omega_k t) = \sum_{k=1}^m W_k \cos(\omega_k t - \varphi_k), \quad (2.9) \quad (2.11)$$

где

$$Z_k^{(1)} = Z_k + Z_k^*, \quad Z_k^{(2)} = i(Z_k - Z_k^*), \\ W_k = 2|Z_k|, \quad \varphi_k = \text{arctg}(Z_k^{(2)}/Z_k^{(1)}).$$

3. Проанализируем, какие ограничения накладываются на Z_k стационарным характером процесса. Рассмотрим корреляционную функцию

$$B(t_1, t_2) = \overline{u(t_1)u^*(t_2)}.$$

процесса

Подставляя в правую часть $u(t_1)$ и $u^*(t_2)$ в виде сумм в соответствии с (2.7), получаем

$$\begin{aligned}
 B(t_1, t_2) &= \overline{\sum_{k=1}^m Z_k e^{i\omega_k t_1} \sum_{l=1}^m Z_l^* e^{-i\omega_l t_2}} = \\
 &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \overline{Z_k Z_l^*} e^{i(\omega_k t_1 - \omega_l t_2)}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Так как рассматриваемый процесс $u(t)$ является стационарным, его корреляционная функция должна зависеть не от t_1 и t_2 по отдельности, а только от их разности $\tau = t_2 - t_1$. Как следует из (2.12), это условие выполняется только в том случае, если

$$\overline{Z_k Z_l^*} = 0 \text{ при } k \neq l,$$

т. е. если комплексные амплитуды на любых различных частотах ω_k и ω_l не коррелированы между собой. В этом случае выражение (2.10) принимает вид

$$B(t_1, t_2) = B(\tau) = \sum_{k=1}^m F_k e^{i\omega_k \tau}, \quad (2.11)$$

где $F_k = \overline{Z_k Z_k^*}$ представляет собой энергию гармоники с частотой ω_k . Если в этом выражении положить $\tau = 0$, то получим

$$B(0) = \overline{u^2(t)} = \sum_{k=1}^m F_k, \quad (2.12)$$

т. е. суммарная энергия случайного процесса равна сумме энергий гармоник, по которым осуществлено его разложение.

Таким образом, вещественный процесс вида (2.7) является суперпозицией некоррелированных между собой гармонических колебаний со случайными комплексными амплитудами.

Недостаток рассмотренного метода применительно к спектральному разложению турбулентного процесса состоит в том, что при разложении функции $u(t)$ на конечном интервале $[0, T]$ получаемый спектр является не сплошным, а линейчатым. И, хотя ряд физических явлений характеризуется линейчатыми спектрами (спектр излучения атомов, спектр гармонического колебания) из физических соображений очевидно, что спектр турбулентности должен быть сплошным. Для этого необходимо рассматривать бесконечный по времени стационарный процесс $u(t)$.

2.2.2. Разложение случайного процесса на бесконечном интервале.

Интеграл Фурье – Стилтеса.

Что произойдет с разложением $u(t)$ при $T \rightarrow \infty$? Разложение вида

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

невозможно, так как не выполняется условие разложимости функции $u(t)$ в интеграл Фурье – условие абсолютной сходимости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty$$

При рассмотрении бесконечной реализации турбулентного процесса

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt = \infty$$

При $T \rightarrow \infty$ $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, то есть число гармоник на любом интервале $[\omega_1, \omega_2]$

неограниченно возрастает. Энергия, соответствующая любой конкретной частоте стремится к нулю. Спектр становится непрерывным. И хотя энергия на любой частоте ω равна нулю, сумма всех комплексных амплитуд в интервале частот $d\omega = [\omega, \omega + d\omega]$ отлична от нуля (рис. 2.4). И тогда спектральное разложение стационарного случайного процесса может быть представлено в виде интеграла Фурье – Стилтеса:

Рис.2.4.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (2.15)$$

где $Z(\omega)$ - сумма всех амплитуд Z_k на интервале частот $\omega_k < \omega$, а $dZ(\omega)$ – сумма амплитуд всех гармоник на интервале $d\omega$, величина, которую можно рассматривать как комплексную амплитуду, соответствующую произвольной частоте ω .

Комплексные амплитуды $dZ(\omega)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам амплитуд Z_k , рассмотренным выше.

1. Центрированность

$$\overline{dZ(\omega)} = 0. \quad (2.14) \quad (2.16)$$

2. Комплексная сопряженность

$$dZ(-\omega) = dZ^*(\omega). \quad (2.15) \quad (2.17)$$

3. Некоррелированность

$$\overline{dZ(\omega_k) dZ^*(\omega_l)} = 0 \text{ при } \omega_k \neq \omega_l. \quad (2.16) \quad (2.18)$$

Произведение амплитуд на одинаковой частоте, естественно, не равно нулю:

$$\overline{dZ(\omega) dZ^*(\omega)} = F(\omega) d\omega, \quad (2.17) \quad (2.19)$$

где $F(\omega)$ -неслучайная, неотрицательная функция физический смысл которой становится

очевидным, если снова рассмотреть корреляционную функцию процесса $u(t)$:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \overline{u(t+\tau)u(t)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \overline{dZ(\omega) dZ^*(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} F(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (2.18) \quad (2.20)$$

Положив в этом выражении $\tau=0$, получаем

$$B(0) = \sigma_u^2 = \overline{u^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega, \quad (2.19) \quad (2.21)$$

откуда следует, что функция $F(\omega)$ описывает распределение энергии случайного процесса по частотам. Она называется временной (или частотной) спектральной плотностью или, короче, временным (частотным) спектром процесса $u(t)$.

2.2.3. Свойства временных спектров. Теорема Винера—Хинчина

Отметим три важных свойства временного спектра.

1. Как следует из (2.19), временная спектральная плотность является неотрицательной:

$$F(\omega) \geq 0. \quad (2.20) \quad (2.22)$$

2. $F(\omega)$ является четной функцией

$$F(-\omega) = F(\omega). \quad (2.21) \quad (2.23)$$

3. Третье важное свойство следует из соотношения (2.20). Так как это соотношение есть не что иное, как представление функции $B(\tau)$ в виде интеграла Фурье, то стоящая под

интегралом спектральная функция связана с $B(\tau)$ обратным преобразованием Фурье. Таким образом:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} F(\omega) d\omega, \quad (2.22) \quad (2.24)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} B(\tau) d\tau. \quad (2.23) \quad (2.25)$$

Соотношения (2.25) представляют собой содержание важной теоремы Винера—Хинчина, в соответствии с которой спектральная и корреляционная функции стационарного случайного процесса связаны между собой преобразованиями Фурье. Отсюда следует вывод о том, что вся информация о частотном составе анализируемого процесса полностью описывается как функцией спектральной плотности $F(\omega)$, так и корреляционной функцией $B(\tau)$. На практике при определении тех или иных статистических характеристик турбулентного сигнала, как это будет показано ниже, иногда удобно использовать $F(\omega)$, а в других случаях более выгодно использовать $B(\tau)$.

Так как $F(\omega)$ является симметричной функцией, то на практике удобнее рассматривать спектр $E(\omega)$, где

$$E(\omega) = 2F(\omega) \quad \text{и} \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (2.24) \quad (2.26)$$

Соотношения (2.25) и (2.26) при замене $F(\omega)$ на $E(\omega)$ принимают следующий вид:

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} E(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (2.25)$$

$$E(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (2.27)$$

а выражение (2.21):

$$\bar{u}^2 = B(0) = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega. \quad (2.26) \quad (2.28)$$

Довольно часто вместо угловой частоты ω , рад/с, используют линейную частоту $f = \omega/2\pi$, 1/с. В этом случае удобно пользоваться спектром

$$E(f) = 2\pi E(\omega), \quad (2.27) \quad (2.29)$$

для которого выполняется соотношение, аналогичное (2.28):

$$\bar{u}^2 = \int_0^{\infty} E(f) df. \quad (2.28) \quad (2.30)$$

Именно этот спектр получают на практике при исследовании сигнала методом фильтрации с помощью узкополосного фильтра, настраиваемого на различные частоты.

Соотношения (2.21), (2.28) и (2.30), характеризующие физический смысл различных спектральных плотностей, полезно также записать одной строкой:

$$B(0) = \overline{u(t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} E(f) df. \quad (2.29) \quad (2.31)$$

Так как при изучении спектральных характеристик сигнала наибольший интерес представляет не абсолютное значение, а форма спектра, то для сравнения спектров различных сигналов удобно рассматривать нормированные спектральные плотности $F^*(\omega)$, $E^*(\omega)$ и $E^*(f)$, используя для нормировки величину $\sigma_u^2 = \overline{u(t)^2}$.

Например:

$$F^*(\omega) = \frac{F(\omega)}{\overline{u(t)^2}} = \frac{F(\omega)}{\sigma_u^2}. \quad (2.30) \quad (2.32)$$

Для нормированных спектральных плотностей, как это следует из (2.31), выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) d\omega = 1. \quad (2.31) \quad (2.33)$$

Очевидно, что нормированные спектры связаны преобразованием Фурье с коэффициентом автокорреляции $R(\tau)$

2.2.4, Частотные спектры и временные масштабы

Получим соотношения, связывающие временные микро- и макромасштабы с частотным спектром. Из (1.34) следует выражение для тэйлоровского микромасштаба:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_t^2} &= -\frac{1}{2\sigma_u^2} \left[\frac{\partial^3 B(\tau)}{\partial \tau^3} \right]_{\tau=0} = -\frac{1}{2\sigma_u^2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos \omega \tau d\omega \right]_{\tau=0} = \\ &= \frac{1}{2\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^3 F(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 F^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \omega^2 E^*(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (2.32) \quad (2.34)$$

Тэйлоровский макромасштаб можно получить, рассмотрев предел

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} E^*(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{E(\omega)}{\sigma_u^2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

С учетом (1.35)

$$\Lambda_t = \frac{\pi}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} E_{uu}^*(\omega) \quad (2.35)$$

Рассмотрим примеры некоторых процессов и их корреляционные функции (Рис.2.5)

Первый из рассматриваемых процессов – центрированный случайный процесс $u(t)$ – рис.2.5,а. Обычно в экспериментах центрируют турбулентные процессы, отсекая постоянную составляющую. Эта постоянная составляющая (осредненная скорость, осредненная температура в некоторой точке потока и т.д.) измеряется отдельно специальными методами, а случайный центрированный сигнал подвергается корреляционному анализу. На рисунке изображена типичная затухающая кривая автокорреляционной функции $B_{uu}(\tau)$, которую будем сравнивать с автокорреляционными функциями других процессов. Рассмотрим случайный процесс $w(t)$, также центрированный (рис.2.5,б) и характеризующийся такой же интенсивностью, что и процесс $u(t)$: $\sigma_u = \sigma_w$. Но осциллограмма $w(t)$ содержит более высокочастотные компоненты, то есть спектр процесса $w(t)$ – более широкий, он распространяется в область более высоких частот по сравнению со спектром процесса $u(t)$. При этом автокорреляционная функция затухает быстрее, иллюстрируя общую закономерность: чем шире спектр процесса, тем уже его автокорреляционная функция.

На следующем графике (рис.2.5,в) изображена гармоническая функция – синусоида с частотой ω_1 и ее автокорреляционная функция. Этой синусоидой может быть помеха на измерительной линии с частотой промышленной сети 50 Гц. Такую помеху на экране осциллографа не всегда легко отличить от узкополосного турбулентного сигнала. Однако корреляционная функция позволяет легко отличить детерминированный сигнал от случайного. Необходимо учитывать следующие обстоятельства:

Рис. 2.5 Примеры автокорреляционных функций некоторых процессов

а) $u(t)$ – случайный центрированный процесс;

б) $w(t)$ – случайный центрированный процесс другого спектрального состава,

$$\sigma_u = \sigma_w;$$

в) $v(t)$ – гармонический процесс – синусоида частоты ω_1 ;

г) на процесс $u(t)$ наложена постоянная составляющая a ;

д) процесс $u(t)$ зашумлен гармоническим сигналом частоты ω_1 .

1. Автокорреляционная функция случайного центрированного процесса всегда стремится к нулю с ростом τ . Автокорреляционная функция детерминированного процесса этим свойством не обладает. В частности, автокорреляционная функция синусоидального процесса с частотой ω_1 представляет собой незатухающий осциллирующий процесс, а именно – косинусоиду той же частоты.
2. Последнее замечание относительно частоты ω_1 является проявлением общей закономерности, а именно: автокорреляционная функция содержит в себе информацию о всех частотах, содержащихся в спектре рассматриваемого процесса. Нет ни одной лишней частоты, и не одной не потеряно. Поэтому, в принципе, можно проводить спектральный анализ как самого процесса, так и его автокорреляционной функции.
3. Легко получить аналитическое выражение для автокорреляционной функции синусоидального сигнала $v(t)=\sin\omega_1 t$:

$$B_{vv}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau.$$

Дисперсия синусоидального процесса:

$$\sigma_v^2 = B_{vv}(0) = \frac{A^2}{2},$$

а интенсивность равна $\sigma_v = \frac{A}{\sqrt{2}}$. Последнее выражение хорошо известно в

электротехнике как действующее значение синусоидального напряжения переменного тока.

Обратимся к рис.2.5,г. Распространенная в экспериментальной практике ситуация: мы думаем, что имеем дело с центрированным процессом $u(t)$, а на исследуемый процесс наложен сигнал постоянного уровня $a=\text{const}$. Происхождение сигнала a может быть совсем не связано с турбулентностью. Например, это может быть неконтролируемый небаланс электронной схемы измерений. Полагая процесс центрированным, мы обычно используем упрощенную формулу для оценки автокорреляционной функции:

$$B_{uu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt$$

Расчет по этой формуле при наличии константы a приводит к результату, когда автокорреляционная функция при возрастании τ стремится не к нулю, а к значению a^2 . Таким образом автокорреляционная функция позволяет выявить «сдвиг нуля» исследуемого процесса и внести соответствующую поправку.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию (рис.2.5,д): на турбулентный сигнал $u(t)$ наложился гармонический шум $v(t)$. Тогда вместо процесса $u(t)$ мы имеем дело с процессом $\varphi(t)=u(t)+v(t)$. Из физических соображений можно сделать достаточно достоверное допущение, что эти процессы некоррелированы. Нетрудно показать, что автокорреляционные функции некоррелированных процессов обладают аддитивностью. Поэтому изображенная на рис.2.5,д автокорреляционная функция процесса $\varphi(t)$ представляет собой сумму автокорреляционных функций процессов $u(t)$ и $v(t)$, изображенных на рис.2.5,а и рис.2.5,в, соответственно. Наличие у функции $B_{\varphi\varphi}(\tau)$ незатухающего гармонического «хвоста» с полной достоверностью свидетельствует о зашумленности исследуемого турбулентного случайного процесса детерминированной помехой. Часто удается восстановить искомую функцию $B_{uu}(\tau)$ (изображена пунктирной линией) простым графическим вычитанием из функции $B_{\varphi\varphi}(\tau)$ косинусоиды, достаточно четко проявившейся на «хвосте» измеренной автокорреляционной функции.

Рассмотренные примеры еще раз убедительно свидетельствуют о чрезвычайной информативности и полезности такой статистической характеристики как автокорреляционная функция.

2.3. Спектры однородных случайных полей

2.3.1 Спектры однородного скалярного поля

Перейдем к рассмотрению математического аппарата и понятий, используемых при спектральном анализе «мгновенных фотографий» исследуемого однородного поля - сигналов, полученных во всех точках рассматриваемой области в некоторый фиксированный момент времени. Начнем с анализа скалярного сигнала $u(x, t_0)$, для краткости аргумент t_0 указывать не будем.

Одномерные спектры однородного скалярного поля. Рассмотрим вначале изменение анализируемого сигнала вдоль одной из координатных осей, например $u(x_1)$. Спектральный анализ такого сигнала полностью аналогичен анализу стационарных сигналов, рассмотренному в предыдущем параграфе.

Функция $u(x_1)$ представляется в виде интеграла Фурье-Стилтьеса (см. выражение (2.15))

$$u(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1 x_1} dZ(k_1). \quad (2.34)$$

Свойства комплексных амплитуд $dZ(k_1)$ полностью аналогичны свойствам комплексных амплитуд $dZ(\omega)$:

1. Центрированность

$$\overline{dZ(k_1)} = 0. \quad (2.35)$$

2. Комплексная сопряженность

$$dZ(-k_1) = dZ^*(k_1). \quad (2.36)$$

3: Некоррелированность

$$\overline{dZ(k_1) \cdot dZ^*(k_1')} = 0 \text{ при } k \neq k', \quad (2.37)$$

$$\overline{dZ(k_1) \cdot dZ^*(k_1)} = F(k_1) dk_1, \quad (2.38)$$

где $F(k_1)$ — одномерная спектральная плотность, или одномерный спектр.

Как и в предыдущем случае, одномерный спектр $F(k_1)$ представляет собой неотрицательную четную функцию. Этот спектр и соответствующая корреляционная функция также связаны взаимным преобразованием Фурье:

$$F(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{uu}(r_1) e^{-ik_1 r_1} dr_1, \quad (2.39)$$

$$B_{uu}(r_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1) e^{ik_1 r_1} dk_1. \quad (2.41)$$

Учитывая симметричность $F(k_1)$, удобно ввести

$$E(k_1) = 2F(k_1). \quad (2.40)$$

При этом энергия случайного процесса $\overline{u^2(x)}$ связана с одномерными спектрами $F(k_1)$ и $E(k_1)$ очевидными соотношениями

$$\overline{u^2(x_1)} = [B_{uu}(r_1)]_{r_1=0} = \sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1) dk_1 = \int_0^{\infty} E(k_1) dk_1. \quad (2.41)$$

Так же как и при рассмотрении временных спектров, можно ввести понятие нормированных одномерных спектров $F^*(k_1)$ и $E^*(k_1)$, используя в качестве нормирующего множителя $1/\overline{u^2(x_1)}$, и получить соотношения, связывающие пространственные микро- и макромасштабы с одномерным спектром:

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{2z_u^2} \int_0^\infty k_1^2 E(k_1) dk_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty k_1^2 E^*(k_1) dk_1; \quad (2.42)$$

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} E^*(k_1) = \frac{2\Lambda_1}{\pi}.$$

(2.44)

Исследуя изменение исследуемого сигнала вдоль двух других координатных осей $u(x_2)$ и $u(x_3)$, можно аналогичным образом получить одномерные спектры $\tilde{F}(k_2)$, $F(k_3)$ и $E(k_2)$, $E(k_3)$. Очевидно, что в случае анизотропного случайного поля спектры вдоль различных направлений будут отличаться друг от друга.

Рассмотрим в качестве примера (рис.2.6) спектры тех же процессов, для которых в предыдущем разделе были изображены (рис.2.5.) корреляционные функции. Первые две колонки рисунка 2.6 совершенно аналогичны рисунку 2.5. Поэтому прежде всего отсылаем читателя к достаточно подробному комментарию к рис.2.5 (см. стр.). В третьей колонке приведены спектры этих же процессов. Анализ графиков позволяет сделать следующие выводы:

На Рис.2.6,а и рис.2.6,б в третьей колонке изображены графики временной спектральной плотности процессов $u(t)$ и $w(t)$. Чем уже кривая автокорреляционной функции, тем шире спектральная плотность. Отметим, что площади под кривыми $E_{uu}(\omega)$ и $E_{ww}(\omega)$ одинаковы, поскольку дисперсии процессов $u(t)$ и $w(t)$ равны.

На рис.2.6,в изображен синусоидальный процесс $v(t)=A\sin\omega_1 t$. Как мы уже знаем автокорреляционная функция этого процесса представляет собой косинусоидальную функцию $B_{vv}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_1\tau$ (). Это может показаться странным, но спектральная

плотность такого «простого» и «знакомого» процесса как синусоида, строго говоря, не существует, поскольку не существует преобразования Фурье автокорреляционной функции вида (). Действительно, преобразование Фурье существует только для абсолютно интегрируемых функций, а выражение () этому условию не удовлетворяет. Другими словами, не существует спектральной плотности у процесса, энергия которого содержится не в диапазоне частот, а сосредоточена на одной частоте (в нашем случае на частоте ω_1) или на дискретном наборе частот. Теория не допускает существования спектральной плотности для процессов с линейчатым дискретным спектром. На практике при проведении спектрального анализа спектр процесса $v(t)$ будет выглядеть как острый пик на частоте ω_1 (теоретически – бесконечно узкий пик бесконечно большой высоты. Аналитического выражения для этого пика не существует. Можно это выразить символически, используя δ -функцию:

$$E(\omega_1) = \frac{A^2}{2} \delta(\omega - \omega_1).$$

Дельта-функция – это не аналитическая функция, введенная Дираком. Она обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \delta(\xi) &= \infty & \text{при } \xi = 0 \\ \delta(\xi) &= 0 & \text{при } \xi \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi &= 1 \end{aligned}$$

Спектральная плотность константы a (рис.2.6,г) представляет собой δ -функцию на нулевой частоте. На практике измерить плотность энергии на нулевой частоте невозможно, так как для этого нужно было бы проводить спектральный анализ реализации бесконечно большой длины. Скорее всего, мы просто не заметим постоянной составляющей a при спектральном анализе, либо обнаружим некоторый всплеск на кривой спектральной плотности в области очень низких частот.

Аддитивность автокорреляционных функций процессов $u(t)$ и $w(t)$, показанных на рис. 2.6,д, означает аддитивность частотных спектров. С учетом этого никаких дополнительных комментариев к этому графику, как нам кажется, не требуется.

Рис.2.6. Примеры автокорреляционных функций и частотных спектров некоторых процессов

- а) $u(t)$ –случайный центрированный процесс;
- б) $w(t)$ – случайный центрированный процесс другого спектрального состава,
 $\sigma_u = \sigma_w$;
- в) $v(t)$ – гармонический процесс – синусоида частоты ω_1 ;
- г) на процесс $u(t)$ наложена постоянная составляющая a ;
- д) процесс $u(t)$ зашумлен гармоническим сигналом частоты ω_1 .

В заключение отметим, что операция интегрирования экспериментально полученных кривых связана со значительно меньшими погрешностями по сравнению с операцией дифференцирования. Поэтому определение временного микромасштаба следует производить по соотношению (2.34) с использованием экспериментально полученной функции $E(\omega)$, а определение временного макромасштаба – по соотношению (1.35) с использованием функции $R(\tau)$, при этом соотношение (2.35) позволяет получить величину $[E^*(\omega)]_{\omega=0}$, которую невозможно получить экспериментальным путем, так как для этого необходимо иметь реализации бесконечной длины.

Трехмерные спектры однородного скалярного поля. Три одномерных спектра $F(k_1)$, $F(k_2)$ и $F(k_3)$, полученные в предыдущем разделе, не дают полного представления о спектральном составе рассматриваемого поля $u(x_1, x_2, x_3)$. Полную информацию о трехмерном поле скалярной величины может дать только трехмерный спектр.

Как отмечалось выше, одномерную функцию $u(x_1)$ на интервале $[0, L]$ можно разложить в ряд Фурье. Аналогично любое трехмерное поле $u(x)$ в ограниченном объеме, имеющем форму параллелепипеда с размерами L_1 , L_2 и L_3 , называемом обычно «турбулентным ящиком», можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$u(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{i k x} \quad (2.43) \quad (2.45)$$

Некоторое представление о плоской волне (или гармонике) $u_h = A_k e^{i k x}$ дает рис. 2.6. Ориентация этой волны в пространстве и длина волны $\lambda = 2\pi/|k|$ задаются волновым вектором k . Амплитуда и фаза волны определяются комплексной

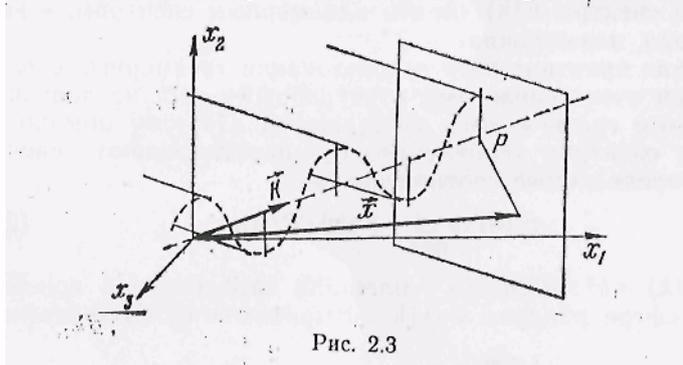


Рис. 2.3
Рис.2.6

амплитудой A_k . В любой плоскости, проведенной через произвольную точку P , перпендикулярно вектору k , значение u_h постоянно и равно $u_h(P)$, так как для точек, лежащих на этой плоскости, скалярное произведение kx постоянно и равно OP . Поскольку u_h является действительной величиной, то комплексные амплитуды гармоник k и $-k$ должны быть комплексно-сопряженными; $A_h(-k) = A_h^*(k)$, и формула (2.45) принимает следующий вид;

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k e^{i k x} + A_k^* e^{-i k x}) \quad (2.44) \quad (2.46)$$

Произведение $A_k A_k^*$ характеризует энергию гармоник с волновым вектором k . В волновом пространстве k для задания информации об энергии гармоник u_h необходимо волновому вектору k (или, что то же самое, соответствующей точке волнового пространства M) поставить в соответствие значение $A_k^2 = A_k A_k^*$. Если теперь всем гармоникам, участвующим в разложении рассматриваемой функции $u(x)$ (выражения (2.45) или (2.46)), или соответствующему множеству точек в волновом пространстве поставить в соответствие значения

энергий этих гармоник, то мы получим распределение энергии функции $u(x)$ по волновому пространству $A_n^2(k)$

или, что то же самое, трехмерный спектр рассматриваемого поля.

Следует подчеркнуть, что при разложении произвольного трехмерного поля $u(x)$ в ограниченном объеме с размерами L_1 , L_2 и L_3 в спектральных разложениях (2.45) или (2.46) допустимы только такие гармоники, проекции которых кратны величинам $2\pi/L_1$, $2\pi/L_2$ и $2\pi/L_3$.

В спектральном пространстве эти гармоники образуют систему точек с координатами $k_1 = \frac{2\pi}{L_1} m$, $k_2 = \frac{2\pi}{L_2} n$ и $k_3 = \frac{2\pi}{L_3} l$, где m, n, l — целые числа. Таким образом, спектр любого поля, рассматриваемого в ограниченном пространстве, всегда является дискретным.

Как и в случае однородных процессов (см. п. 2.2.1), случайный характер рассматриваемого однородного поля позволяет получить его спектральное представление при увеличении размеров турбулентного ящика до бесконечности в виде интеграла Фурье—Стилтьеса:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k x} dZ(k), \quad (2.45) \quad (2.47)$$

где $dZ(k)$ представляет собой сумму комплексных амплитуд гармоник в интервале волновых чисел от k до $k+dk$.

Свойства комплексных амплитуд уже подробно рассматривались выше:

- 1) для центрированного сигнала $\overline{dZ(k)} = 0$;
- 2) в силу вещественности $u(x)$ комплексные амплитуды должны удовлетворять свойству сопряженности $dZ(-k) = dZ^*(k)$;
- 3) вследствие однородности и случайного характера поля $u(x)$ комплексные амплитуды являются некоррелированными;

$$\begin{aligned} \overline{dZ(k) dZ^*(k_1)} &= 0 && \text{при } k \neq k_1, \\ \overline{dZ(k) dZ^*(k)} &= F(k) dk && \text{при } k = k_1, \end{aligned}$$

где $F(k)$ — трехмерная спектральная плотность или трехмерный спектр случайного трехмерного поля $u(x)$.

В отличие от дискретного трехмерного спектра A_n^2 трехмерный спектр $F(k)$ характеризует энергию не одной дискретной гармоники с волновым вектором k , а энергию, заключенную в элементарном объеме волнового пространства, равную $F(k) dk$, $dk = dk_1 dk_2 dk_3$.

Свойства трехмерного спектра $F(k)$ также вполне очевидны:

1. $F(k) \geq 0$.
2. $F(-k) = F(k)$.
3. К этому спектру также применима теорема Винера—Хинчина (см. п. 2.2.3):

$$B_{uu}(r) \approx \iiint_{-\infty}^{\infty} F_{uu}(k) e^{i k r} dk \quad (2.46) \quad (2.48)$$

$$F_{uu}(k) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} B_{uu}(r) e^{-i k r} dr. \quad (2.47) \quad (2.49)$$

Если в (2.46) подставить $r=0$, то получим

$$B_{uu}(0) = \overline{u^2(x)} = \sigma_u^2 = \iiint_{-\infty}^{\infty} F_{uu}(k) dk. \quad (2.48) \quad (2.50)$$

Это выражение показывает, что энергия рассматриваемого случайного поля $u(x)$ выражается в виде интеграла от трехмерного спектра по всему волновому пространству.

Таким образом, трехмерный спектр $F(k)$ дает полную энергетическую структуру трехмерного поля $\dot{u}(x)$.

Зная $F(k)$, можно определить одномерные спектры:

$$\begin{aligned} F(k_1) &= \iint_{-\infty}^{\infty} F(k) dk_2 dk_3, \\ F(k_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} F(k) dk_1 dk_3, \\ F(k_3) &= \iint_{-\infty}^{\infty} F(k) dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$(2.51)$$

Естественно, что обратная операция - определение трехмерного спектра $F(k)$ по его одномерным спектрам, вообще говоря, невозможна.

Но для практического использования трехмерные спектры являются очень сложными и неудобными, они не допускают наглядного графического изображения. Поэтому обычно при анализе спектров турбулентности рассматривают спектры $E(k)$, определяемые соотношением

$$E(k) = \iint_{|k|=k} F(k) dS(k), \quad (2.50) \quad (2.52)$$

где $dS(k) = k^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi$ - площадь элементарной поверхности на сфере радиуса $k = |k|$. Выражение (2.52) показывает, что спектр $E(k)$ характеризует суммарную энергию сферического слоя dk . В случае изотропного поля спектральное распределение энергии не зависит от направления: $F(k) = F(k)$ и, следовательно, $E(k) = 4\pi k^2 F(k)$.

Очевидно, что суммарная энергия рассматриваемого поля выражается через $E(k)$ следующим образом:

$$\bar{u}^2 = \sigma_u^2 = \int_0^{\infty} E(k) dk. \quad (2.51) \quad (2.53)$$

Так как поверхность сферы при $k \rightarrow 0$ стремится к нулю, то $E(0) = 0$, т. е. спектры $E(k)$ всегда проходят через начало координат (рис. 2.7). Трехмерные спектры этому условию не подчиняются.

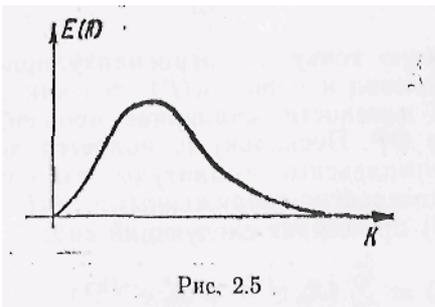


Рис. 2.5

Рис.2.7

2.3.2. Спектры однородного векторного поля

Рассмотрим «мгновенную фотографию» векторного поля в момент t_0 - $u(x, t_0)$, эквивалентную трем фотографиям для проекций этого вектора:

$$u_1(x, t_0), u_2(x, t_0), u_3(x, t_0).$$

Если бы эти три поля были независимыми, то каждое из них характеризовалось бы своим трехмерным спектром и векторная величина $u(x)$ характеризовалась бы совокупностью трех трехмерных спектров $F_1(k)$, $F_2(k)$ и $F_3(k)$. Но компоненты вектора скорости статистически тесно связаны между собой, и эти связи характеризуются не только корреляциями $u_i(x)u_i(x+r)$, но и взаимными корреляциями

$\overline{u_j(x) u_i(x+r)}$. Поэтому, как отмечалось в гл. 1, корреляционные связи компонент векторного поля характеризуются корреляционным тензором второго ранга

$$B_{ji}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} B_{11}(\mathbf{r}) & B_{12}(\mathbf{r}) & B_{13}(\mathbf{r}) \\ B_{21}(\mathbf{r}) & B_{22}(\mathbf{r}) & B_{23}(\mathbf{r}) \\ B_{31}(\mathbf{r}) & B_{32}(\mathbf{r}) & B_{33}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теоремой Винера—Хинчина, можно ввести понятие спектрального тензора $F_{ji}(\mathbf{k})$, компоненты, которого связаны с $B_{ji}(\mathbf{r})$ соотношениями

$$F_{ji}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ji}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.52)$$

Простой физический смысл имеют только диагональные члены этого тензора: $F_{11}(\mathbf{k})$, $F_{22}(\mathbf{k})$ и $F_{33}(\mathbf{k})$. Очевидно, что они представляют собой трехмерные спектры компонент вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и описывают распределение энергии этих компонент по волновому пространству.

Сумма диагональных членов $F_{11} + F_{22} + F_{33}$ описывает распределение суммарной энергии турбулентности $\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}$ по волновому пространству.

Для изотропной турбулентности тензор $F_{ji}(\mathbf{k})$ становится симметричным, и в системе координат, одна из осей которой совпадает с направлением вектора \mathbf{k} (главные оси), запись спектрального тензора существенно упрощается:

$$\begin{pmatrix} F_{LL}(k) & 0 & 0 \\ 0 & F_{NN}(k) & 0 \\ 0 & 0 & F_{NN}(k) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

В этом случае и для векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ можно ввести понятие спектра $\overline{E(k)}$

$$E(k) = 4\pi k^2 F_{jj} = [F_{LL}(k) + 2F_{NN}(k)] \cdot 4\pi k^2. \quad (2.54)$$

Этот спектр описывает распределение суммарной энергии турбулентности в зависимости от модуля волнового вектора k , и очевидно, что выполняется соотношение

$$\overline{u_j u_j} = \overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} = \int_0^{\infty} E(k) dk. \quad (2.55)$$

(2.57)

3. ДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В гл. 1 рассматривались величины, однозначно характеризующие турбулентное поле в некоторый момент времени или в некоторой точке пространства. Было показано, что наиболее удобными характеристиками случайного поля являются следующие моменты:

- моменты первого порядка - осредненные значения компонент вектора скорости $\overline{U_i}$, осредненная температура $\overline{\theta}$ и осредненное давление \overline{P} ;
- моменты второго порядка, наиболее важными из которых являются компоненты тензора рейнольдсовых напряжений $\overline{u_i u_j}$, а также смешанные моменты $\overline{u_i \theta}$, $\overline{u_i p}$ и др.;
- моменты третьего и более высокого порядка, например $\overline{u_i u_j u_k}$.

Однако до сих пор ничего не говорилось о причинах возникновения случайного турбулентного поля, о процессах, его поддерживающих, о закономерностях его изменения в пространстве и времени; иными словами, ничего не говорилось о динамике турбулентности. С практической же точки зрения, наибольший интерес представляет изучение закономерностей, описывающих изменение полей скорости $U_i(x, t)$, давления $P(x, t)$ и температуры $\theta(x, t)$. К рассмотрению этого вопроса мы и приступаем в настоящей главе.

3.1. Осредненные уравнения турбулентного движения (уравнения динамики первых моментов)

Современная теория турбулентности базируется на допущении о том, что уравнения конвективного теплообмена: уравнения неразрывности, движения и энергии, применимы для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. Естественно, что в случае турбулентных течений эти уравнения описывают динамику актуальных (мгновенных) значений параметров потока. Справедливость этого допущения вытекает из того факта, что размеры минимальных турбулентных образований (вихрей, молей) на несколько порядков превышают размеры молекул. Благодаря этому соображения о сплошности среды, использованные при выводе этих уравнений, справедливы и в случае турбулентных течений.

Таким образом, в случае несжимаемой жидкости с постоянными свойствами динамика полей скорости, давления и температуры описывается уравнениями:

-неразрывности

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0; \quad (3.1)$$

-движения

$$\rho \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}; \quad (3.2)$$

-энергии

$$\rho c \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + U_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right), \quad (3.3)$$

где P , θ , U_i — актуальные (мгновенные) значения давления, температуры и компонент вектора скорости.

Здесь использована тензорная форма записи уравнений, в которой подразумевается суммирование по немому (встречающемуся дважды) индексу, т. е.

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = U_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_i}{\partial x_3};$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_3^2}.$$

Чтобы получить уравнения, описывающие динамику осредненных параметров, необходимо, как обычно, выразить мгновенные значения параметров в виде суммы осредненной и пульсационной составляющих:

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad (3.4)$$

$$P = \bar{P} + p, \quad (3.5)$$

$$\theta = \bar{\theta} + \vartheta, \quad (3.6)$$

подставить (3.4) - (3.6) в уравнения (3.1) - (3.3) и произвести осреднение.

Так как уравнение (3.1) линейно, а среднее значение пульсационной величины равно нулю: $\overline{u_k} = 0$, то при осреднении уравнения неразрывности получаем

$$\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (3.7)$$

Вычтя из (3.1) уравнение (3.7), получим аналогичное уравнение неразрывности для пульсационных компонент скорости

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (3.8)$$

Подставив выражения (3.4) и (3.5) в уравнение движения (уравнение Навье-Стокса (3.2)), получим:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left[\bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \right\} = \\ = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (3.9)$$

При осреднении этого уравнения подчеркнутые члены, в которых осредняются пульсационные величины, обращаются в нуль. Последнее слагаемое в левой части с использованием (3.8) может быть представлено в виде:

$$\overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_k}.$$

Перенеся его в правую часть и объединив с силой вязкости, окончательно получим :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - \rho \overline{u_i u_k} \right). \quad (3.10)$$

Это уравнение, описывающее совместно с (3.7) динамику осредненных компонент турбулентного поля скорости \bar{U}_i и осредненного давления \bar{P} , называется уравнением Рейнольдса.

Аналогичные преобразования уравнения энергии (3.3) позволяют получить уравнение, описывающее динамику осредненного температурного поля:

$$\rho c \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \rho c \overline{u_k \vartheta} \right). \quad (3.11)$$

Важным отличием уравнений (3.10) и (3.11) по сравнению с уравнениями (3.2) и (3.3) является их незамкнутость, обусловленная появлением новых неизвестных величин $\overline{\rho u_i u_k}$ и $\overline{\rho c u_k \vartheta}$. Слагаемые $\overline{\rho u_i u_k}$ имеют смысл дополнительных турбулентных напряжений (складываются с вязкими напряжениями $\mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}$) и называются напряжениями Рейнольдса. Слагаемые $\overline{\rho c u_k \vartheta}$ представляют собой компоненты вектора теплового потока, обусловленного турбулентным переносом тепла.

Таким образом, для замыкания системы уравнений, описывающих динамику осредненных параметров турбулентного течения - уравнения (3.7), (3.10) и (3.11) - необходимо девять дополнительных соотношений: шесть для компонент тензора $\overline{\rho u_i u_k}$ (этот тензор симметричен) и три для компонент вектора $\overline{\rho c u_k \vartheta}$.

На основе строгих физических закономерностей замыкание системы осредненных уравнений оказывается невозможным. Поэтому приходится прибегать к некоторым гипотезам,

базирующимся на каких-либо моделях турбулентных течений. Ряд постоянных, фигурирующих в получаемых таким образом соотношениях, определяется из эксперимента. Эксперимент же является и критерием правильности, работоспособности принятых гипотез. В связи с этим указанное направление исследования турбулентности называется полуэмпирическим, оно составляет содержание так называемой полуэмпирической теории турбулентности. Полуэмпирическая теория турбулентности играет важную роль при решении большинства практических задач.

Мы не будем останавливаться на рассмотрении этого направления, так как оно подробно изучается в курсах «Механика жидкости и газа» и «Тепломассообмен». Проблему замыкания осредненных уравнений - уравнений для первых моментов - мы рассмотрим с другой точки зрения.

Как показали Фридман и Келлер [14], для получения выражений, описывающих динамику вторых моментов $\overline{u_i u_k}$, обуславливающих незамкнутость уравнения (3.10), можно снова воспользоваться уравнением Навье-Стокса (3.2), а для $\overline{u_k \vartheta}$ — уравнением (3.3). Казалось бы, таким образом проблему замыкания можно решить строго, не прибегая ни к каким гипотезам. Однако оказывается, это не так: строгим путем замкнуть систему осредненных уравнений турбулентности принципиально невозможно. В полученные для $\overline{u_i u_k}$ выражения войдут новые неизвестные - моменты третьего порядка. В принципе с помощью уравнения Навье-Стокса можно получить выражения и для этих моментов и для моментов любого, более высокого порядка, но они всегда будут незамкнутыми, так как содержат новые неизвестные - моменты еще более высокого порядка, причем количество этих неизвестных с увеличением порядка момента быстро возрастает.

Уравнения для моментов второго порядка $\overline{u_i u_k}$ и $\overline{u_k \vartheta}$ играют в современной теории турбулентности важную роль. Поэтому имеет смысл получить и проанализировать эти уравнения.

3.2. Уравнения динамики моментов второго порядка поля скорости (уравнения баланса энергии)

3.2.1. Баланс полной энергии турбулентности

Вначале получим уравнение сохранения для полной энергии турбулентного течения, включающей в себя и энергию осредненного, и энергию пульсационного движения.

Для этого уравнение движения для актуальных величин – уравнение Навье—Стокса

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (3.12)$$

где $\sigma_{ik} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)$ – вязкие напряжения, домножим на U_j :

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} U_j \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} U_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (3.13)$$

Запишем также уравнение движения для j-й компоненты скорости, домноженное на U_i :

$$U_i \frac{\partial U_j}{\partial t} + U_i U_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} U_i \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} U_i \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}. \quad (3.14)$$

Сложив (3.11) и (3.12), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (U_i U_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i U_j U_k) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left(U_i \frac{\partial P}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \left(U_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Проведя осреднение уравнения (3.15), положив $i=j$ и умножив на $\rho/2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{\overline{U_i U_i} U_k}{2} \right) = -\overline{U_i \frac{\partial P}{\partial x_i}} + \overline{U_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}}. \quad (3.16)$$

Все слагаемые этого уравнения имеют энергетический смысл. В частности, величина

$$E = \rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2} = \rho \frac{\overline{U_i} \overline{U_i}}{2} + \rho \frac{\overline{u_i u_i}}{2} = E_{\text{оср}} + E_{\tau} \quad (3.17)$$

представляет собой суммарную кинетическую энергию турбулентного потока в единице объема. Равенство (3.17) показывает, что полная энергия турбулентности E есть сумма энергии осредненного движения $E_{\text{оср}} = \rho \overline{U_i} \overline{U_i} / 2$ и энергии пульсационного движения:

$$E_{\tau} = \rho \overline{u_i u_i} / 2 = \rho (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}) / 2.$$

Преобразуем слагаемые в правой части уравнения (3.16). К первому из них добавим равное нулю выражение

$$-\overline{U_i \frac{\partial P}{\partial x_i}} - P \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{P U_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{P U_k}). \quad (3.18)$$

Чтобы лучше понять смысл второго слагаемого в правой части (3.16), воспользуемся очевидным соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i \sigma_{ik}}) = \overline{U_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}} + \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}. \quad (3.19)$$

Левая часть, этого выражения представляет собой полную работу сил вязкости, задаваемых тензором вязких напряжений σ_{ik} . Слагаемые правой части (3.19) показывают, на что затрачивается эта работа. Первое из них $-\overline{U_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}}$ — та часть работы вязких сил, которая затрачивается на изменение кинетической энергии жидкой частицы. Действительно, $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$, как известно, есть равнодействующая сил вязкости, приложенных к жидкой частице, Если эта равнодействующая равна нулю, то вязкие силы не оказывают влияния на ускорение жидкой частицы.

Второе слагаемое $\overline{\sigma_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}$ описывает ту часть работы вязких сил, которая превращается в тепло. Эту величину обычно называют скоростью вязкой диссипации и обозначают $\rho \varepsilon$:

$$\rho \varepsilon = \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k}. \quad (3.20)$$

Нетрудно показать, что вязкая диссипация $\rho \varepsilon$ всегда положительна. Рассмотрим явно неотрицательную величину

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2 > 0.$$

Произведя несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2 &= \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} = \\ &= 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

откуда для вязкой диссипации получаем выражение

$$\rho \varepsilon = \frac{\mu}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (3.21)$$

Воспользовавшись выражениями (3.18) и (3.19), можем записать уравнение баланса энергии (3.16) в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{U_i U_i U_k}}{2} + \overline{P U_k} + \overline{\sigma_{ik} U_i} \right) = -\rho \varepsilon. \quad (3.22)$$

Первое слагаемое этого уравнения определяет скорость изменения суммарной кинетической энергии турбулентного течения в произвольной точке потока. Остальные слагаемые описывают причины, по которым происходит это изменение:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\underbrace{\frac{\overline{U_i U_i}}{2}}_A U_k + \underbrace{\overline{P}}_B U_k + \underbrace{\overline{\sigma_{ik}}}_{C} U_i \right)$$

— слагаемые дивергентного типа. Они характеризуют перераспределение энергии по пространству за счет соответственно

А - конвективного переноса осредненной скоростью, В - работы сил давления и С - молекулярной диффузии благодаря вязкости; $\rho \varepsilon$ — скорость вязкой диссипации, которая, очевидно, всегда дает отрицательный вклад в энергетический баланс.

Проинтегрируем уравнение (3.22) по объему V , ограниченному замкнутой твердой поверхностью S . При этом учтем, что на основании теоремы Остроградского-Гаусса интегрирование слагаемых дивергентного типа по объему сводится к интегрированию по поверхности:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2} U_k + \overline{P} U_k + \overline{\sigma_{ik}} U_i \right) dV = \\ = \int_S \left(\rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2} U_k + \overline{P} U_k + \overline{\sigma_{ik}} U_i \right) dS_k = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Равенство нулю здесь следует из граничного условия $U_k = 0$ на твердой поверхности. Уравнение (3.23) показывает, что члены дивергентного типа не могут изменить суммарную энергию в объеме V , а лишь перераспределяют ее по пространству в пределах этого объема. Следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V E dV = - \int_V \rho \varepsilon dV. \quad (3.24)$$

Суммарная кинетическая энергия в объеме V уменьшается, необратимо преобразуясь в тепло механизмом вязкой диссипации. Этот вывод настолько очевиден, что появляется чувство неудовлетворенности результатами проведенного анализа уравнения (3.22). Действительно, это уравнение не слишком информативно, поскольку является чересчур общим. Описывая баланс суммарной энергии, оно не дает возможности судить о сложных и интересных процессах обмена энергией между осредненным и пульсационным движением, в которых заключена природа турбулентности.

3.2.2. Баланс энергии осредненного движения

Если аналогичные операции проделать с уравнением Рейнольдса, то получим.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{U_i U_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i U_i U_k}) = - \frac{1}{\rho} \left(\overline{U_i} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \overline{U_i} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} \right) + \\ + \frac{1}{\rho} \left(\overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} + \overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} \right) - \left[\overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) + \overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

При $i=j$, обозначив $E_{\text{оср}} = \rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2}$, получим

$$\frac{\partial E_{\text{оср}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_k} E_{\text{оср}}) = - \overline{U_k} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_k} + \overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} - \overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}). \quad (3.26)$$

Выражая два последние слагаемые этого уравнения с помощью соотношений, аналогичных (3.19);

$$\begin{aligned} \overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i} \overline{\sigma_{ik}}) - \overline{\sigma_{ik}} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}, \\ \overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i} \overline{u_i u_k}) - \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

получаем уравнение баланса энергии усредненного течения:

$$\frac{\partial E_{\text{оср}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{U}_k E_{\text{оср}} + \overline{U}_k \overline{P} - \overline{U}_l \overline{\sigma_{lk}} + \frac{\rho}{2} \overline{U}_l \overline{u_l u_k} \right] =$$

$$= - \overline{\sigma_{lk}} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k} + \rho \overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k}. \quad (3.28)$$

Слагаемое I этого уравнения - скорость изменения энергии осредненного движения, слагаемое II - перенос этой энергии по пространству, III-вязкая диссипация энергии осредненного движения. Последнее IV-слагаемое этого уравнения описывает обмен энергией осредненного и пульсационного движений. Наиболее убедительным подтверждением правильности подобной трактовки физического смысла этого слагаемого является то, что в уравнении баланса турбулентной энергии E_τ (см. ниже) имеется точно такой же член, но с противоположным знаком. Если это слагаемое отрицательно, то осредненное течение отдает энергию пульсационному движению, если положительно - перенос энергии происходит в обратном направлении.

3.2.3. Баланс энергии пульсационного движения

Получим вначале уравнение, описывающее динамику моментов второго порядка $\overline{u_i u_j}$. Осредним уравнение (3.15) и вычтем из него (3.25). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{U}_i \overline{u_i u_k} + \overline{U}_j \overline{u_i u_k} + \overline{U}_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_j u_k}] =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) +$$

$$+ \left(\overline{U}_i \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_j u_k} + \overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_k} \right). \quad (3.29)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{U}_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_j u_k}] =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) -$$

$$- \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} \right). \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) описывает динамику компонент тензора турбулентных напряжений (напряжений Рейнольдса) и в принципе, как об этом уже говорилось выше, можно попытаться использовать его для замыкания уравнения Рейнольдса (3.10). Однако не трудно видеть, что уравнение (3.30) содержит новые моменты второго и третьего порядка:

$$\overline{u_i u_j u_k}, \quad \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \overline{u_i} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}$$

и, следовательно, система уравнений (3.10) и (3.30) вновь оказывается незамкнутой.

И, наконец, полагая в (3.30) $i=j$, выражая первое и второе слагаемые в правой части аналогично (3.27) и домножая на $\rho/2$, получим уравнение баланса энергии пульсационного движения:

$$E_\tau = \frac{\rho}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{\rho}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}),$$

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{U}_k E_\tau + \overline{u_k p} - \overline{u_l \sigma_{lk}} + \rho \overline{u_k} \frac{\overline{u_l u_l}}{2} \right] =$$

$$= - \overline{\sigma_{lk}} \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_k} - \rho \overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k}. \quad (3.31)$$

Физический смысл слагаемых этого уравнения достаточно очевиден.

$\partial E_\tau / \partial t$ — скорость изменения турбулентной энергии в рассматриваемой точке пространства.

Остальные слагаемые описывают причины этого изменения. Слагаемое $\frac{\partial}{\partial x_k} (A + B + C + D)$ характеризует подвод (отвод) турбулентной энергии в данную точку пространства благодаря

конвективному переносу пульсационной энергии осредненной скоростью - A , диффузии по пространству за счет пульсаций давления - B , молекулярной диффузии, т. е. переносу турбулентной энергии по пространству механизмом молекулярной вязкости - C , турбулентной диффузии - D , которая представляет собой перенос турбулентной энергии по пространству турбулентными пульсациями и определяется одноточечными тройными моментами пульсаций скорости. Слагаемое $\rho \varepsilon_\tau = \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ характеризует скорость вязкой диссипации турбулентной энергии (сравним с уравнениями (3.20) и (3.28)), Вязкая диссипация всегда дает отрицательный вклад в баланс кинетической энергии.

Второе слагаемое в правой части этого уравнения совпадает с последним слагаемым уравнения (3.28) и имеет противоположный знак. Очевидно, что эти слагаемые описывают обмен энергией между осредненным и пульсационным движениями. Надо сказать, что обычно в пристенной турбулентности это слагаемое в уравнении (3.28) отрицательно, а в уравнении (3.31) положительно. Это означает, что энергия передается от осредненного движения пульсационному. По этой причине обычно говорят, что рассматриваемое слагаемое описывает генерацию (порождение) турбулентной энергии в данной точке потока.

Если при переходе от уравнения (3.30) к уравнению (3.31) не производить суммирования по i , то получим уравнение для энергии одной компоненты пульсационного движения $(E_\tau)_i = \frac{\rho}{2} \overline{u_i u_i}$, где $i = 1, 2$, или 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (E_\tau)_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{U_k (E_\tau)_i} + \overline{u_k p} \delta_{ik} - \overline{u_i \sigma_{ik}} + \rho \overline{u_k \frac{u_i u_i}{2}} \right] = \\ = - \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \rho \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.30) наличием слагаемого $\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, описывающего обмен энергией между тремя компонентами пульсационной скорости за счет пульсаций давления. При суммировании по i вследствие того, что $\partial u_i / \partial x_i = 0$, эти слагаемые в сумме дают нуль, т. е. обмен энергией между тремя компонентами пульсационной скорости не изменяет суммарной энергии пульсационного движения.

Интересный результат дает применение уравнения (3.29) к стабилизированному стационарному течению в плоском канале, в котором отлична от нуля только одна компонента осредненной скорости — $\overline{U_1}$, изменяющаяся по координате x_2 :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \overline{u_2 \frac{u_1 u_1}{2}} - \overline{\sigma_{12} u_1} \right] = - \rho \varepsilon_{1\tau} - \rho \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (3.33a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \overline{u_2 \frac{u_2 u_2}{2}} + \overline{u_2 p} - \overline{\sigma_{22} u_2} \right] = - \rho \varepsilon_{2\tau} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad (3.33б)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \overline{u_3 \frac{u_3 u_3}{3}} - \overline{\sigma_{32} u_3} \right] = - \rho \varepsilon_{3\tau} + \rho \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (3.33в)$$

Суммируя уравнения (3.30 а,б,в), получаем уравнение баланса суммарной энергии всех трех пульсационных компонент

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\rho \overline{u_2 \frac{u_1 u_1}{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{u_2 p} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{u_1 \sigma_{21}} \right) = - \rho \varepsilon_\tau - \rho \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2}. \quad (3.34)$$

В уравнении (3.34) слагаемое DT — турбулентная диффузия, DP — диффузия за счет пульсаций давления, DM — вязкая диффузия, слагаемое D — вязкая диссипация, слагаемое Γ — генерация энергии турбулентности.

Анализ уравнений (3.33) и (3.34) позволяет сделать следующие выводы:

1. Слагаемое $-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2}$, описывающее генерацию турбулентной энергии, присутствует только в уравнении баланса энергии продольных пульсаций.

Обычно в пристенной турбулентности $-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} > 0$. Это утверждение можно пояснить следующим образом. Считаем, что осредненная скорость монотонно возрастает в направлении от стенки; $\partial \overline{U_1} / \partial x_2 > 0$ (рис. 3.1).

Следуя рассуждениям Л. Прандтля, полагаем, что пульсации скорости в данной точке вызываются тем, что в эту точку попадают вследствие своего хаотического движения моли жидкости из соседних областей течения, где осредненная скорость \bar{U}_1 имеет другую величину. Логика рассуждений Прандтля читателю хорошо известна из курса механики жидкости. (Следует подчеркнуть, что при всей своей кажущейся простоте эта модель Прандтля является весьма физической и, как доказывают структурные последние измерения пристенной турбулентности, в целом правильно отражает суть явления). Итак, следуя Прандтлю, нетрудно убедиться, что положительным поперечным пульсациям u_2 соответствуют отрицательные продольные пульсации u_1 , и наоборот (рис. 3.1). Поэтому в среднем $\overline{u_1 u_2} < 0$, откуда с учетом $\partial \bar{U}_1 / \partial x_2 > 0$ следует $(-\overline{u_1 u_2} \partial \bar{U}_1 / \partial x_2) > 0$ в уравнении (3.33a),

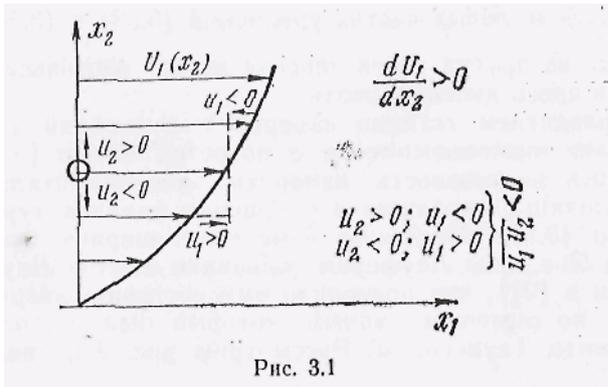


Рис. 3.1

а в уравнении баланса энергии осредненного движения соответствующее слагаемое $(\overline{u_1 u_2} \partial \bar{U}_1 / \partial x_2) < 0$. Это означает, что генерация турбулентности в рассматриваемом тчении происходит следующим образом. Энергия отбирается от осредненного движения и передается только продольной компоненте пульсаций. Этим объясняется тот экспериментальный факт (см. рис. 1.15), что интенсивность продольной компоненты пульсаций вблизи стенки существенно выше, чем поперечных.

2. Поперечные пульсации u_2 и u_3 получают энергию не непосредственно от осредненного течения, а опосредованно. Энергия, воспринятая продольной компонентой, перераспределяется между всеми тремя компонентами пульсаций скорости благодаря пульсациям давления. Пульсации давления не могут изменить суммарную турбулентную энергию E_T в данной точке, о чем свидетельствует то, что в уравнении баланса (3.34)

$$\rho \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} + \rho \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} = 0. \quad (3.35)$$

Роль пульсаций давления заключается в том что они стремятся равномерно перераспределить энергию между тремя компонентами пульсаций, т. е. приблизить турбулентность к изотропии, при которой $E_{T1} = E_{T2} = E_{T3}$.

3. Генерируемая в данной точке потока турбулентная энергия частично диссипирует за счет молекулярной вязкости, а остальная ее часть переносится в другие точки пространства. Этот перенос описывают слагаемые вида

$\frac{\partial}{\partial x_2} (\dots)$ в левых частях уравнений (3.33) и (3.34). В свою очередь из других точек энергия может вноситься в данную точку и здесь диссипировать.

С развитием техники измерения пульсаций скорости с помощью термоанемометра с нагретой нитью [3,4] предоставилась возможность измерить экспериментально почти все величины, входящие в уравнение баланса турбулентной энергии (3.34). Подобные измерения впервые были выполнены в 50-е годы Лауфером (описание опытов Лауфера приводится в [3]), что позволило ему составить энергетический баланс по опытным данным, который был несколько скорректирован Таунсендом. Рассмотрим рис. 3.2, на котором приведена диаграмма баланса турбулентной энергии по Лауферу—Таунсенду для пристенной области течения, где эта диаграмма в равной степени справедлива для круглой трубы и плоского канала.

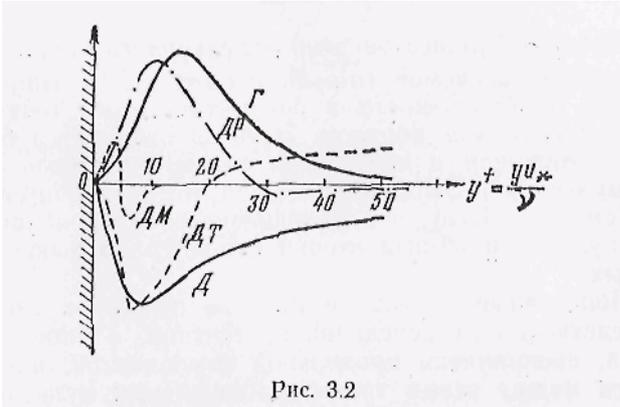


Рис. 3.2

Как видно, максимум генерации турбулентной энергии находится у стенки, но за пределами вязкого подслоя, т. е. в переходной области. Большая часть энергии здесь же и диссипирует, о чем свидетельствует тот факт, что координата максимума диссипации энергии турбулентности приблизительно совпадает с положением максимума генерации. Кроме того, и по величине эти слагаемые в рассматриваемой области течения близки. В то же время часть порожденной энергии выносится из области максимальной генерации. Причем молекулярная диффузия выносит энергию пульсаций преимущественно в направлении стенки, в вязкий подслой, где эта энергия диссипирует, необратимо преобразуясь в тепло. Гораздо большая доля турбулентной энергии выносится из области максимальной генерации турбулентной диффузией, причем этот диффузионный механизм создает перенос энергии в направлении ядра турбулентного потока, где, как показывает анализ, существует динамическое равновесие между притоком энергии благодаря турбулентной диффузии и вязкой диссипацией (на рис. 3.2 область больших значений y^+ не показана). И только одно слагаемое уравнения (3.34), содержащее пульсации давления, Лауферу не удалось определить непосредственными измерениями, поэтому оно было рассчитано как величина, замыкающая баланс. (Справедливости ради отметим, что, насколько нам известно, до сих пор никому не удалось выполнить подобные измерения.)

Пусть точность измерений была не слишком высокой, однако в качественном отношении правильность рассмотренной схемы не вызывает сомнений. Важно отметить, что вблизи стенки генерация приблизительно уравнивается диссипацией, и можно записать приближенное выражение баланса турбулентной энергии в «бездиффузионном приближении»:

$$\overline{u_1 u_2} \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \cong \epsilon_T = \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right), \quad (3.36)$$

Таким образом, мы рассмотрели имеющие прозрачный физический смысл уравнения энергетического баланса вида (3.34), содержащие неизвестные корреляции $\overline{u_i u_j}$. Подобные уравнения или их модификации, упрощения, в том числе и (3.36), часто используют как основу при построении модельных уравнений для замыкания системы осредненных уравнений Рейнольдса.

3.3 Уравнение баланса «энергии» температурных пульсаций

, Способ получения этого уравнения аналогичен способу, описанному в предыдущем параграфе, поэтому мы не будем подробно останавливаться на соответствующих выкладках.

Если из уравнения (3.3) вычесть уравнение (3.11), то получим уравнение, описывающее динамику пульсации температуры:

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \overline{u_k \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}} = a \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (3.37)$$

Домножим (3.37) на $\overline{\theta}$ и произведи осреднение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{\theta^2}}{2} \right) + \overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{\theta^2}}{2} \right) + \overline{u_k \overline{\theta}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k \frac{\overline{\theta^2}}{2}} \right) = a \overline{\theta} \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (3.38)$$

Преобразуя правую часть этого уравнения с помощью следующего очевидного соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\overline{\vartheta^2}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x_k}} \right) = \overline{\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_k \partial x_k}} + \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k},$$

подучим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\vartheta^2}}{2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{U_k \frac{\vartheta^2}{2}} + \overline{u_k \frac{\vartheta^2}{2}} - a \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{\vartheta^2}}{2} \right) = - \frac{\overline{u_k \vartheta}}{\Gamma} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k} - a \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k}. \quad (3.39)$$

Величину $\sigma_\vartheta^2 = \overline{\vartheta^2}$ будем называть «энергией» температурных пульсаций (в кавычках), имел в виду полезную аналогию полученного балансного соотношения (3.39) с рассмотренным выше уравнением баланса турбулентной энергии (3.34). Величина $\overline{\vartheta^2}$, являясь дисперсией пульсаций температуры, характеризует размах пульсаций, но, конечно, не является энергетической характеристикой в общепринятом понимании, что видно хотя бы из ее размерности. Как было показано А. М. Обуховым [15], эта величина характеризует изменение энтропии единицы массы жидкости при переходе ее от некоторого первоначального состояния, в котором имели место температурные неоднородности с дисперсией $\overline{\vartheta^2}$, к состоянию термодинамического равновесия под действием внутренних необратимых процессов.

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{\vartheta^2}}{2}$$

Итак скорость изменения плотности «энергии» температурных пульсаций в точке. Остальные слагаемые уравнения описывают причины этого изменения:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}$$

($DK+DT+DM$) перенос «энергии» по пространству за счет конвекции осредненной скоростью - DK , турбулентной диффузии - DT , диффузии молекулярной теплопроводностью DM ;

$$-\overline{u_k \vartheta} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k} - \text{генерация температурных пульсаций};$$

$$\varepsilon_\vartheta = a \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k} \quad \text{— температурная диссипация, т. е. рассеивание, рассасывание}$$

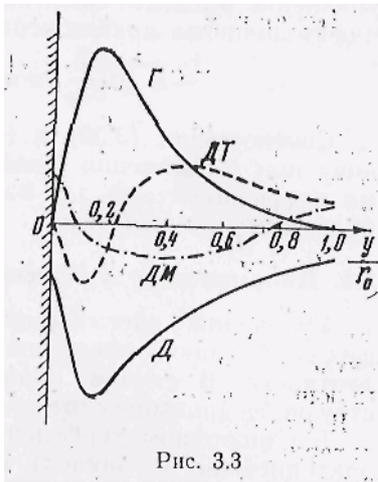
температурных неоднородностей под действием молекулярной теплопроводности.

Интегрируя (3.39) по замкнутому объему, ограниченному твердыми теплопроводными стенками и применяя к слагаемым дивергентного типа формулу Остроградского—Гаусса, с учетом граничных условий имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\overline{\vartheta^2}}{2} dV + \int_V \overline{u_k \vartheta} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_k} dV + \int_V \varepsilon_\vartheta dV = a \int_S \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{\vartheta^2}}{2} dS_k. \quad (3.40)$$

Выражение в правой части' (3.40)., вообще говоря, не равно нулю. Оно описывает перенос «энергии» пульсаций температуры молекулярной теплопроводностью через границу жидкости и стенки. Этот процесс переноса является, единственным механизмом переноса турбулентных температурных пульсаций в стенку. Можно показать, что уровень температурных пульсаций в стенке и в жидкости зависит от соотношения свойств (коэффициента теплопроводности; теплоемкости и плотности) жидкости и твердой стенки.

Вернемся к (уравнению (3.39). На кафедре Инженерной теплофизики МЭИ оно было подробно исследовано применительно к области гидродинамической и тепловой стабилизации при стационарном турбулентном течении жидкого металла (ртути) в круглой трубе. В этом случае $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и конвекция осредненной скоростью (слагаемое DK) равна нулю, Остальные слагаемые были рассчитаны по опытным данным. Результаты этого анализа показаны на рис.3.3.



Не трудно видеть, что, генерация температурных пульсаций наиболее интенсивна в области течения $0,7 < r/r_0 < 0,9$, т. е. в области, где пульсации скорости и градиент осредненной температуры достаточно велики. Генерация снижается в направлении как к центру, так- и к стенке трубы. В центре трубы генерация равна нулю, поскольку равен нулю градиент осредненной температуры. Большая часть «энергии» пульсаций температуры, возникших в области наибольшей генерации, здесь же и диссипирует, так как максимумы генерации и диссипации примерно совпадают. В то же время часть «энергии» выносится из области максимальной генерации турбулентной и молекулярной диффузией преимущественно в направлении к центру потока, где она диссипирует. Молекулярная диффузия преобладает в области вязкого подслоя и, как уже отмечалось, является единственным источником пульсаций температуры в стенке трубы. Более подробно—см. [6].

Заметим, что в той области течения, где и генерация, и диссипация велики, между ними существует примерное динамическое равновесие. Для этой области можно записать уравнение баланса «энергии» пульсаций температуры в «бездиффузионном» приближении

$$-u_k \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \cong a \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \right). \quad (3.41)$$

Соотношения (3.39) и (3.41) могут быть приняты за основу при составлении модельных уравнений с эмпирическими коэффициентами для замыкания системы уравнений турбулентного теплообмена.

3.4. Более развитая модель структуры пристенной турбулентности. Понятие о когерентных структурах.

Традиционное представление о структуре пограничного слоя на обтекаемой твердой поверхности показано на рис 3.4.

Рис.3.4.

Область 1 – область внешнего потока;

Область 2 – перемежающаяся область, в которую время от времени проникают вихри из пристенной области;

Область 3 – турбулентного течения, распределение скорости в которой описывается логарифмической зависимостью;

Область 4 – переходная область, область, в которой имеет место максимальная генерация турбулентности;

Область 5 – вязкий подслой, в котором скорость изменяется по линейному закону.

Такая схема имеет ряд недостатков, особенно много вопросов и возражений вызывает представление о вязком подслое, имеющем постоянную толщину δ . Хорошо известно, что

толщина ламинарного подслоя на пластине увеличивается с увеличением x : $\delta \approx \sqrt{x}$.

Многочисленные измерения пульсаций скорости и температуры вблизи стенки свидетельствуют о том, что процесс в вязком подслое имеет перемежающийся характер. В соответствии с этим схема пограничного слоя изображена на рис.3.5.

Рис.3.5.

Пограничный слой на стенке нарастает пропорционально \sqrt{x} до тех пор, пока его толщина не станет такой, что слой потеряет устойчивость. В этом месте пристенный моль, имеющий небольшую скорость, выбрасывается в поток, скорость которого выше. Некоторое время моль обтекается окружающим потоком, его масса растет за счет присоединенной массы жидкости. В это время на стенку притекает порция жидкости из потока, она тормозится силами вязкости и происходит процесс нарастания пограничного слоя. Этот процесс повторяется почти периодически по времени и длине стенки. Разложение Рейнольдса на осредненную и пульсационную составляющие в этом случае следует модифицировать:

$$U_i = \bar{U}_i + \tilde{u}_i + u'_i$$

где U_i – актуальное значение скорости;

\bar{U}_i - осредненная скорость;

\tilde{u}_i – почти периодическая (когерентная) составляющая;

u'_i - чисто случайная пульсационная составляющая..

3.5. Динамические уравнения корреляционных и спектральных функций

Уравнения баланса турбулентной энергии позволили нам сделать важные выводы о зарождении турбулентности, о механизмах взаимодействия осредненного и пульсационного движения, генерации, диссипации диффузии по пространству энергии в реальной пристенной турбулентности. Однако, хотелось бы получить дополнительную информацию о внутренних процессах в турбулентном поле. Уравнения баланса не могут ответить на этот вопрос, так как они выражают баланс интегральной величины:

$$\rho \frac{u_j u_j}{2} = \iiint F_{jj}(k) dk,$$

а турбулентность имеет сложную вихревую структуру и энергия некоторым образом распределена между вихрями, имеющими разные масштабы. Ответ на этот вопрос могут дать уравнения баланса пространственных корреляций или пространственных спектров.

3.5.1. Динамическое уравнение пространственной корреляции скорости.

Уравнения, рассматривавшиеся в предыдущих параграфах этой главы, описывают динамику неоднородной турбулентности. В случае однородной турбулентности соответствующие динамические уравнения значительно упрощаются.

В однородном турбулентном поле все статистические характеристики не зависят от координат (см. п. 1.2.2) и в частности, корреляционные функции

$$B_{ij} = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = B_{ij}(\mathbf{r}, t).$$

Очевидно также, что осредненная скорость \bar{U}_i должна быть постоянной по пространству и соответствующим выбором системы координат нетрудно получить $\bar{U}_i=0$.

Для получения динамического уравнения пространственной корреляции скорости выделим в рассматриваемом поле две произвольные точки А и В с координатами \mathbf{r}_A и $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}$. Запишем уравнения Навье-Стокса для пульсационных скоростей в точке А и в точке В, отмечая все величины в точке В штрихами, и воспользуемся способом Фридмана-Келлера для получения балансных уравнений:

$$\text{В точке А: } \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad | \times u'_j \quad (3.42)$$

$$\text{В точке В: } \frac{\partial u'_j}{\partial t} + u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x'_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'_k \partial x'_k} \quad | \times u_i \quad (3.43)$$

Суммируя эти уравнения и выполнив операцию осреднения, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i u'_j + u'_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x'_k} = -\frac{1}{\rho} u'_j \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \nu u'_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \nu u_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'_k \partial x'_k}. \quad (3.44)$$

Используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

учтя, что u_i и u'_j относятся к различным точкам пространства и :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial r_i}; \quad \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_k} = \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k}$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u'_j}) &= \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u'_j u'_k u'_i}) - \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i u'_k u'_j}) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r_i} (\overline{p u'_j}) - \frac{\partial}{\partial r_j} (\overline{p' u_i}) \right] + 2\nu \frac{\partial^2 (\overline{u_i u'_j})}{\partial r_k \partial r_k}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

С использованием следующих обозначений:

$$\begin{aligned} B_{ij}(\mathbf{r}, t) &= \overline{u_i u'_j}; \quad B_{pj}(\mathbf{r}, t) = \overline{p u'_j}; \quad B_{ip}(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i p'}; \\ B_{ih,j}(\mathbf{r}, t) &= \overline{u_i u'_h u'_j}; \quad B_{i,h,j}(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i u'_h u'_j}. \end{aligned}$$

Предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_k} (B_{i,h,j} - B_{h,i,j}) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial B_{pj}}{\partial r_i} - \frac{\partial B_{ip}}{\partial r_j} \right] + 2\nu \frac{\partial^2 B_{ij}}{\partial r_k \partial r_k}. \quad (3.44)$$

Уравнение (3.46) представляет собой динамическое уравнение для компонент корреляционного тензора. Оно имеет сложную физическую трактовку. Если же приравнять $i=j$ и положить $\mathbf{r}=0$, то получим уравнение баланса турбулентной энергии однородной турбулентности. Такие уравнения были получены и рассмотрены выше для более общего случая – неоднородной турбулентности с ненулевой средней скоростью \bar{U}_i .

В случае изотропной турбулентности, как нетрудно показать,

$$B_{p,j}(\bar{\mathbf{r}}, t) = B_{i,p}(\bar{\mathbf{r}}, t) = 0.$$

Кроме того, тензор $B_{ij}(\bar{\mathbf{r}}, t)$ становится симметричным и любая его компонента может быть выражена через продольную $B_{LL}(\mathbf{r}, t)$ и поперечную $B_{NN}(\mathbf{r}, t)$ корреляционные функции. В случае несжимаемой жидкости B_{LL} и B_{NN} взаимно однозначно связаны, тогда $B_{ij}(\bar{\mathbf{r}}, t)$ может быть выражена только через $B_{LL}(\mathbf{r}, t)$. Тогда из (3.44) можно получить уравнение баланса продольной корреляции однородной изотропной турбулентности – уравнение Кармана-Ховарта []:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left[B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right]. \quad (3.45)$$

(3.47)

Это уравнение описывает динамику корреляционной функции изотропной однородной турбулентности, и содержит две неизвестные величины B_{LL} и $B_{LL,L}$ и так же, как и другие динамические уравнения турбулентности, является незамкнутым. Так как измерение пространственных корреляционных функций весьма сложно, то это уравнение редко используется в экспериментальной практике. Мы используем уравнение (3.47) для вывода динамического уравнения спектральных функций.

3.5.2. Динамическое уравнение спектральных функций

Так как спектральные и корреляционные функции связаны между собой взаимным Фурье-преобразованием {см. п. 2.2.3}, то, применив преобразование Фурье к уравнению (3.46), получим уравнение для спектральных функций

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{ij} = -ik_l [F_{il,l} - F_{l,il}] - \frac{i}{\rho} [k_l F_{pl} - k_l F_{lp}] - 2\nu k^2 F_{ij}. \quad (3.46)$$

Здесь функции F_{ij} , $F_{u,j}$, $F_{i,u}$, F_{pj} и F_{ip} являются Фурье-преобразованием корреляционных функций B_{ij} , $B_{u,j}$, $B_{i,u}$, B_{pj} и B_{ip} . Обозначив

$$\Gamma_{ij} = -ik_l [F_{il,l} - F_{l,il}],$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{i}{\rho} [k_l F_{pl} - k_l F_{lp}],$$

запишем уравнение (3.48) для компонент спектрального тензора F_{ij} в более компактном виде

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = \Gamma_{ij} + \Pi_{ij} - 2\nu k^2 F_{ij}. \quad (3.47)$$

Диагональные члены этого тензора ($i=j$) представляют собой трехмерные спектры компонент вектора пульсационной скорости. Динамическое уравнение для этих компонент имеет вид (по i не суммируем!)

$$\frac{\partial f_{ii}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \Gamma_{ii}(\mathbf{k}, t) + \Pi_{ii}(\mathbf{k}, t) - 2k^2 F_{ii}(\mathbf{k}, t). \quad (3.48)$$

(3.50)

Слагаемые этого уравнения имеют ясный физический смысл, иллюстрируемый рис.3.6.

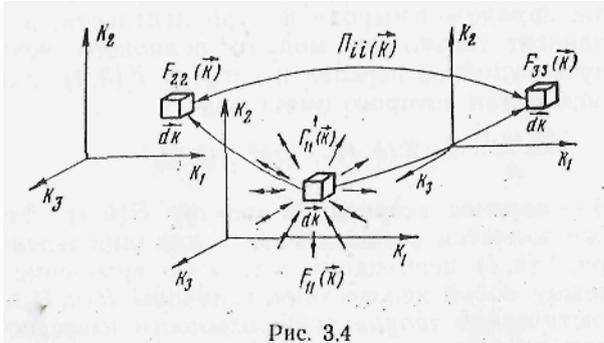


Рис. 3.4

Рис.3.6.

Левая часть уравнения представляет собой скорость изменения плотности энергии в произвольной точке волнового пространства. Слагаемое Γ_{ii} описывает взаимодействие (обмен энергией) рассматриваемой точки с остальными точками волнового пространства. При интегрировании по всему волновому пространству это слагаемое обращается в нуль, т. е. перенос энергии по волновому пространству не изменяет суммарной энергии турбулентности:

Слагаемое Π_{ii} описывает обмен энергией между тремя компонентами пульсационной скорости. При суммировании по i сумма трех слагаемых обращается в нуль, $\Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33} = 0$, т. е. этот процесс не влияет на суммарную энергию в рассматриваемой точке волнового пространства.

Последнее слагаемое, очевидно, описывает уменьшение кинетической энергии пульсационного движения на данном волновом числе за счет вязкой диссипации.

Если в уравнении (3.50) провести суммирование по i , то получим динамическое уравнение для спектральной плотности суммарной энергии всех трех компонент турбулентных пульсаций скорости

$$\frac{\partial F_{ii}(k,t)}{\partial t} = \Gamma_{ii}(k,t) - 2\nu k^2 F_{ii}(k,t). \quad (3.49) \quad (3.51)$$

Здесь $F_{ii} = F_{11} + F_{22} + F_{33}$ - суммарная энергия всех трех компонент турбулентных пульсаций скорости на волновом числе k .

$$u_{ii} u_{ii} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \iiint_{-\infty}^{\infty} F_{ii}(\vec{k}) d\vec{k} \quad (3.52)$$

Преобразуем спектр $F_{ii}(\vec{k})$, перейдя от него к спектру $E(k,t)$

$$E(k,t) = \iint_S F_{ii}(\vec{k},t) dS(|\vec{k}|)$$

Аналогичную операцию можно проделать со слагаемым $\Gamma_{ii}(k,t)$

$$T(k,t) = \iint_S \Gamma_{ii}(\vec{k},t) dS(|\vec{k}|)$$

Тогда уравнение (3-26) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) \quad (3.53)$$

Проинтегрировав уравнение (3-27) по всему волновому пространству, получим уравнение, описывающее динамику полной энергии турбулентности:

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} E(k,t) dk = \int_0^{\infty} T(k,t) dk - 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k,t) dk. \quad (3.54)$$

так как $\int_0^{\infty} T(k,t) dk = 0$, - перенос энергии по волновому пространству не изменяет полной энергии турбулентности, то

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u_i u_i}{2} \right) = -\rho \varepsilon_T, \quad (3.55)$$

где

$$\varepsilon_T = \nu \int_0^{\infty} k^2 E(k,t) dk - \quad (3.56)$$

- вязкая диссипация энергии.

Так как подвод энергии к однородной турбулентности невозможен, то, в соответствии с (3.55), динамика однородной турбулентности это процесс вырождения турбулентности в результате диссипации энергии под действием сил вязкости.

3.6. Краткие сведения о спектрах изотропной турбулентности.

Гипотезы Колмогорова

3.6.1. Перенос энергии по спектру. Каскадная модель Ричардсона.

Уравнение, описывающее динамику энергии однородной турбулентности (3.53), кажется очень простым:

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t), \quad (3.50) \quad (3.57)$$

однако оно является незамкнутым. Чтобы решить это уравнение - получить информацию о форме спектральной кривой и скорости изменения энергии в любой точке волнового пространства, необходимо каким-либо способом описать слагаемое $T(k,t)$ - перенос энергии по спектру.

В статистической теории турбулентности известно много попыток получения некоторых универсальных спектров. При этом в качестве исходного момента для получения таких спектров используются какие-либо гипотезы о переносе энергии по спектру.

Существует большое количество гипотез о спектральном переносе энергии [2]. Первые соображения о каскадном характере переноса энергии по спектру были высказаны Ричардсоном еще в 1922 г. Согласно его представлениям, осредненное течение передает энергию наиболее крупным вихрям. В результате разрушения этих (вихрей образуются более мелкие вихри, затем еще более мелкие, т. е. осуществляется перенос энергии от крупных ко все более мелким масштабам или, что то же самое, из области малых волновых чисел в область больших волновых чисел. Этот процесс дробления вихрей (переноса энергии) продолжается до таких размеров (масштабов), на которых становится существенной вязкая диссипация кинетической энергии движения, в результате которой энергия движения, превращается в тепло.

Рассмотрим этот процесс более подробно. Представим себе некоторое течение, например, изображенное на рис.3.7.

Рис. 3.7

Это течение характеризуется следующими масштабами: масштабом скорости - v_0 , длины - l_0 и времени $t_0 = l_0/v_0$. Полагаем, что эти масштабы определяют начальное состояние течения и его геометрию. Единственное условие, которое делается в отношении этого течения: число Рейнольдса очень велико - $Re = \frac{v_0 l_0}{\nu} \gg \gg \gg 1$. Вследствие этого течение теряет устойчивость с образованием крупных вихрей, которые назовем «вихрями первого порядка». Это означает, что часть энергии потока передана вихрям первого порядка. Очевидно, что образовавшиеся вихри характеризуются своими масштабами: $v_1, l_1, t_1 = l_1/v_1$, а также числом Рейнольдса, которое, очевидно, будет меньше, чем Re_0 , но все же весьма большим: $Re_1 = \frac{v_1 l_1}{\nu} \gg \gg 1$.

Вихри первого порядка также будут неустойчивыми и будут распадаться на вихри второго порядка, передавая им свою энергию, те, в свою очередь, - вихрям третьего порядка и т.д. То есть, будет развиваться каскадный процесс переноса энергии от более крупных вихрей к более мелким, как это показано на схеме на рис.3.8

| Порядок вихря | Масштабы | Число Re |
|---------------|-------------------------|---------------|
| 0 | $l_0, v_0, t_0=l_0/v_0$ | $Re \ggggg 1$ |
| 1 | $l_1, v_1, t_1=l_1/v_1$ | $Re \gggg 1$ |
| 2 | $l_2, v_2, t_2=l_2/v_2$ | $Re \ggg 1$ |
| | | |
| i | $l_i, v_i, t_i=l_i/v_i$ | $Re \geq 1$ |
| | | |
| n | $l_n, v_n, t_n=l_n/v_n$ | $Re \leq 1$ |
| $k \sim 1/l$ | Вязкая диссипация | |

Рис.3.8

Итак, более крупные вихри разваливаются на более мелкие. В ходе этого каскадного процесса рано или поздно образуются вихри «i» - ого порядка, для которых число Re_i по величине уже будет не сильно превышать единицу. Это означает, что внутри структурных образований (вихрей) масштаба l_i силы вязкости становятся существенными. Следовательно, энергия, поступившая в «i»-ый вихрь от более крупных вихрей, не полностью перейдет к более мелким вихрям порядка «i+1». Часть ее в пределах масштаба «i»-ого порядка диссипирует, то есть благодаря вязкости необратимо превратится в тепло. Можно представить себе, что каскадный процесс продолжится и дальше, скажем, до вихрей «n» -ого порядка. Однако роль вязкости при этом будет все более возрастать, пока именно вязкость не остановит каскадный процесс. Это надо понимать так: вероятность появления мелких вихрей масштабов меньших, чем l_n –очень мала. Внутри таких вихрей слишком велики градиенты скорости, стало быть, движение будет мгновенно задавлено силами вязкости, а энергия этого движения превратится в тепло.

Масштаб, характеризующий размеры минимальных турбулентных образований (вихрей), называют масштабом вязкой диссипации. Как свидетельствуют результаты экспериментальных исследований, реальные турбулентные течения в области больших масштабов являются явно неизотропными, но мелкомасштабная часть спектра характеризуется высокой степенью изотропии.

Каскадная модель, как уже отмечалось выше, впервые была сформулирована Ричардсоном, вдохновив его на следующие поэтические строки:

- Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity;
Little whorls have smaller whorls,
And so on unto viscosity. *)

Схема Ричардсона дает качественную, но не всегда правильную картину переноса энергии по спектру (возможен перенос энергии и в противоположном направлении от малых к крупным масштабам).

Вернемся к спектральному уравнению баланса энергии (3.57):

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t), \quad (3.50)$$

Как уже говорилось выше, это уравнение незамкнуто, так как мы не знаем зависимости $T(k,t)$, и не может быть проинтегрировано. Слагаемое $T(k,t)$ в этом уравнении как раз и описывает каскадный процесс переноса энергии по спектру. Для получения количественных соотношений, описывающих слагаемое $T(k,t)$, большинство авторов использует гипотезы, основанные на соображениях размерности. Каждая гипотеза приводит к той или иной форме спектра $E(k,t)$. Так как при формулировке гипотез совершенно не учитывается природа самого процесса переноса энергии по спектру, а мы до настоящего времени почти ничего не знаем о

*) Крупные вихри рожают мелкие вихри, питающиеся за счет их скорости;
Мелкие вихри рожают более мелкие вихри, и так далее до начала действия вязкости.

основанные на соображениях размерности. Каждая гипотеза приводит к той или иной форме спектра $E(k, t)$. Так как при формулировке гипотез совершенно не учитывается природа самого процесса переноса энергии по спектру, а мы до настоящего времени почти ничего не знаем о закономерностях взаимодействия отдельных гармоник спектра, то и получаемые на основе этих гипотез результаты, как правило, далеки от действительности. Однако модель Ричардсона позволяет построить качественную картину поведения всех слагаемых, входящих в уравнение (3.57) – рис. 3.9.

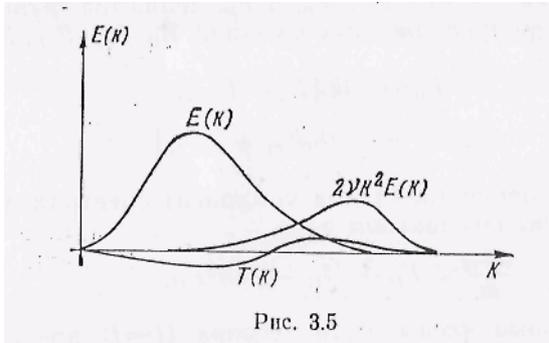


Рис.3.9.

График энергетического спектра $E(k)$, как уже отмечалось ранее, исходит из нуля, достигает максимума при некотором значении волнового числа k_1 и далее убывает с ростом k . Область волновых чисел в окрестности k_1 логично назвать «энергосодержащей областью волновых чисел» (или «энергосодержащей областью масштабов $l \sim 1/k$).

Возникает вопрос: от чего зависит форма спектральной кривой $E(k)$ и положение k_1 на оси волновых чисел? Очевидно, что положение энергосодержащей области спектра определяется тем, в какую область волновых чисел осуществляется подвод энергии к турбулентности. Подвод энергии к однородной турбулентности, к которой применима спектральная теория, невозможен. Поэтому соответствующее слагаемое, описывающее подвод энергии, в уравнении (3.57) отсутствует. Таким образом форма спектра однородной турбулентности определяется процессом, предшествовавшим созданию однородной турбулентности, тем, в какую область волновых чисел в этом процессе осуществлялась «закачка» энергии в турбулентность. Так как турбулентность чаще всего получает энергию от осредненного течения (см. выше уравнение баланса (3.31)), то, вполне естественно, что энергосодержащая область спектра – это область крупных масштабов (малых k), как и изображено на рис.3.9.

Построив график $E(k)$, легко изобразить и кривую спектра вязкой диссипации, пропорциональную $k^2 E(k)$, которая, очевидно, смещена по отношению к $E(k)$ в сторону *больших* волновых чисел. Координате k_v максимума вязкой диссипации соответствует масштабу мелких вихрей $l_v \approx 1/k_v$, которые интенсивно диссипируют, т.е. подавляются вязкостью.

Теперь можно представить себе форму функции $T(k)$, описывающей перенос энергии по спектру (см. рис.3.9). В соответствии с каскадной моделью Ричардсона, энергия переносится из энергосодержащей области, области крупных масштабов, поэтому здесь $T(k) < 0$, в мелкомасштабную область, область диссипации, где $T(k) > 0$.

3.6.2. Гипотезы Колмогорова. Локальная однородность и локальная изотропия.

А.Н. Колмогоров [2] предположил, что при больших числах Рейнольдса энергосодержащая область спектра и область вязкой диссипации могут почти не перекрываться, могут, как показано на рис.3.10, быть разделены некоторым интервалом Δb , в котором все слагаемые уравнения (3.57), невелики. Хотя слагаемое $T(k)$ в этой области также невелико, через эту область «транзитом» переносится вся энергия турбулентности, которая превращается в тепло в области более высоких волновых чисел.

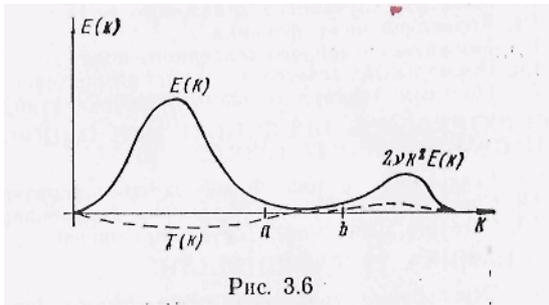


Рис.3.10.

Колмогоров сформулировал две гипотезы:

1^{ая} гипотеза Колмогорова:

При достаточно больших числах Рейнольдса существует область высоких волновых чисел, в которой турбулентность однородна, изотропна и стационарна. В этой области турбулентность находится в статистическом равновесии и однозначно определяется величинами ε_T и ν . Эта область называется «областью универсального равновесия».

2^{ая} гипотеза Колмогорова:

При достаточно больших числах Рейнольдса внутри области универсального равновесия можно выделить область сравнительно небольших волновых чисел, в которой влияние вязкости мало и состояние равновесия определяется только одним параметром ε_T - величиной энергии, переносимой через эту область. Эта область называется «инерционной». Естественно, что форма спектра в этой области определяется величиной ε_T .

По-видимому, гипотезы Колмогорова нуждаются в комментарии. Очевидно, что они представляют собой развитие каскадной модели Ричардсона. Крупные вихри, получающие энергию от осредненного течения «помнят» свою предисторию, то есть содержат в себе информацию о начальных и граничных условиях данного конкретного течения. Однако, в ходе каскадного процесса, по мере образования все более мелких вихрей, информация о начальных и граничных условиях при переходе от поколения к поколению вихрей теряется. Поэтому мелкомасштабные вихри уже этой информацией не располагают. Следовательно, мелкомасштабная турбулентность от начальных и граничных условий данного течения уже не зависит, и ее поведение должно подчиняться некоторым внутренним закономерностям, *универсальным для любого турбулентного течения с большим числом Рейнольдса*. Чем определяется поведение такой универсальной мелкомасштабной турбулентности?

Во-первых, величиной ε_T . Эту величину можно трактовать двояко. С одной стороны, ε_T - это скорость вязкой диссипации, вычисляемая по формуле (3.56). С другой стороны, ε_T представляет собой количество энергии, переносимой по спектру от крупных вихрей к мелким. То есть существует динамическое равновесие между поступлением энергии и ее диссипацией в мелкомасштабной области.

Во-вторых, молекулярной вязкостью, определяемой коэффициентом ν . Чем меньше вихрь, тем роль вязкости, очевидно, становится больше.

Легко понять, что в области универсального равновесия мелкомасштабная турбулентность должна быть локально однородной и локально изотропной, даже если турбулентное течение в целом свойствами однородности и изотропии не обладает. Действительно, мелкие вихри во всех направлениях окружены такими же по масштабам или более мелкими вихрями, которые постоянно возникают, существуют и диссипируют. Существенно более крупные вихри с этого уровня масштабов не видны, как мы не ощущаем размеров Земли, находясь на ее поверхности. Таким образом, к мелкомасштабной области произвольной турбулентности можно применить понятия однородного и изотропного случайного поля, что позволяет существенно упростить математический аппарат теоретического анализа.

Однако турбулентность в области универсального равновесия не только локально однородна и изотропна, но и *стационарна* в статистическом смысле, даже если осредненное течение нестационарно. Чтобы это понять, приведем следующую аналогию. За свою жизнь человек постоянно наблюдает такие природные процессы, как смену дня и ночи, смену времен

года. С его точки зрения эти процессы протекают по раз и навсегда установленному порядку, то есть являются статистически стационарными переменными процессами. Но наука установила, что солнечная система когда-то возникла и, пройдя некоторые этапы своего развития, когда-то прекратит свое существование. Однако в масштабе человеческой жизни эти глобальные изменения неощутимы. Так и мелкие вихри за короткое время своего существования не могут «почувствовать» нестационарный характер осредненного или крупномасштабного вихревого течения. Как уже отмечалось, эти вихри окружены со всех сторон другими мелкими вихрями, которые возникают и проходят все стадии развития вплоть до полной диссипации. В среднем, сколько вихрей возникает, столько же и диссипирует (то есть, сколько энергии поступает, столько же и превращается в тепло) – наблюдается состояние динамического равновесия, являющееся стационарным в статистическом смысле. На этом мы завершаем комментарий к 1 гипотезе Колмогорова.

Что касается 2 гипотезы Колмогорова, То она также имеет ясный физический смысл. Действительно, в области крупных масштабов, то есть за пределами области универсального равновесия, роль вязкости пренебрежимо мала. Внутри области универсального равновесия роль вязкости тем сильнее, чем меньше масштаб вихря (то есть, чем больше волновое число k). Следовательно, можно предположить существование внутри области универсального равновесия некоторой подобласти сравнительно крупных по меркам мелкомасштабной области вихрей, где вязкость еще не существенна. Этой подобласти соответствует интервал сравнительно малых волновых чисел и этот интервал Колмогоров называет «инерционным», чтобы подчеркнуть, что силы инерции внутри него велики по сравнению с силами вязкости. Но инерционный интервал расположен *внутри* области универсального равновесия, в котором поведение турбулентности определяется, как было сказано выше, двумя параметрами: ε_T и ν . И если в инерционном интервале мы пренебрегаем влиянием вязкости, то, следовательно, в инерционном интервале поведение турбулентности и форма спектра определяются всего одним параметром - ε_T .

С учетом проведенных рассуждений можно уточнить вид функции $T(k)$, описывающей перенос энергии по спектру. В энергосодержащей области спектра, откуда энергия отбирается, $T(k) < 0$, о чем уже говорилось выше. В мелкомасштабной области спектра, куда энергия перекачивается и где она диссипирует, $T(k) > 0$. Инерционный интервал лежит в промежутке между энергосодержащей областью и областью диссипации. Поскольку через него энергия перекачивается транзитом, в инерционном интервале $T(k) = 0$.

Следовательно, в инерционном интервале динамическое уравнение энергетического спектра (3.57) вырождается в :

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.58)$$

То есть участок спектра в инерционном интервале волновых чисел не зависит ни от вязкости, ни от времени. Форма спектра в инерционном интервале определяется, как уже было показано ранее, только величиной переноса энергии по спектру ε_T . Тогда форму спектральной кривой $E(k)$ в инерционном интервале можно определить на основании простых соображений размерности.

Размерности рассматриваемых величин таковы:

$$[k] = 1/m = L^{-1}, \quad (3.52)$$

$$[E] = m^3/c^2 = L^3 T^{-2}, \quad (3.53)$$

$$[\varepsilon] = m^2/c^3 = L^2 T^{-3}. \quad (3.54)$$

$$(3.59), (3.60), (3.61)$$

Если из (3.56) выбрать масштаб длины,

$$L \sim 1/k,$$

а из (3.58) — масштаб времени

$$T \sim (\epsilon k^2)^{-1/3},$$

то соотношение (3.57) позволяет получить выражение для масштаба энергии:

$$E \sim k^{-3} [(\epsilon k^2)^{-1/3}]^{-2} = \epsilon^{2/3} \cdot k^{-5/3}. \quad (3.55) \quad (3.62)$$

Отсюда следует, что распределение энергии в инерционном интервале должно подчиняться «закону -5/3». Для более четкого выявления этой закономерности следует строить спектры в логарифмической системе координат (рис. 3.11),

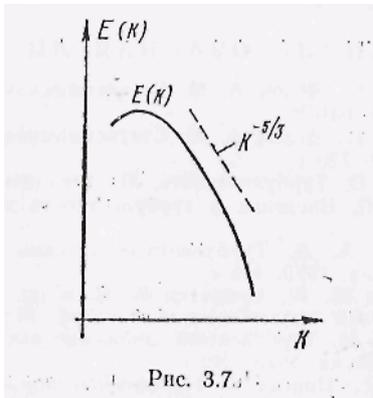


Рис.3.11.

Долгое время участок спектра, подчиняющийся «закону -5/3», не удавалось обнаружить в экспериментально получаемых спектрах. Но в последние годы в спектрах атмосферной турбулентности, характеризуемой очень большими числами Re ($Re > 10^6$), такие участки обнаружены.

Глава 4. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ

4.1 Общий подход к измерению статистических характеристик.

Проблема экспериментального определения статистических характеристик случайных полей и процессов весьма сложна. Ее детальное рассмотрение выходит далеко за рамки данной книги. Существует специальная литература (например / /), в которой рассматриваются:

- датчики первичные преобразователи физических величин;
- помехи на измерительных линиях и способы борьбы с ними;
- электронные приборы и системы для преобразования и измерения случайных сигналов;
- математический аппарат статистического анализа случайных процессов;
- технические и программные средства автоматизации эксперимента;
- разнообразные погрешности, возникающие на различных этапах измерения и анализа случайных процессов.

В данной книге мы не рассматриваем весь комплекс перечисленных вопросов, а лишь называем и обозначаем наиболее специфичные из них, с которыми читатель возможно не сталкивался ранее, но непременно столкнется при экспериментальных исследованиях турбулентности.

Итак, пусть мы имеем четырехмерное случайное поле некоторой физической величины в турбулентном потоке - $\vartheta(x,t)$ (где ϑ - компонента скорости, температура, давление...). Зафиксируем точку x_0 и рассмотрим процесс $\vartheta(x_0,t) = \vartheta(t)$. Считаем его стационарным и эргодическим.

На практике для статистического анализа величины $\vartheta(t)$ необходимо решить три задачи (рис. 4.1):

Рис.4.1

1. С помощью первичного преобразователя (датчика) необходимо величину $\vartheta(t)$ преобразовать в электрический сигнал. В зависимости от исследуемой физической величины в качестве датчика используются: термоанемометр, термопара, кондукционный анемометр, оптико-механический преобразователь и др. Далее, электрический сигнал необходимо преобразовать к виду, удобному для анализа - $u(t)$.

Для этого необходимо:

- а) Усилить аналоговый сигнал;
- б) Провести «редактирование» - первоначальный анализ с целью выявления явного брака;
- в) Полученную информацию преобразовать к виду, необходимому для дальнейшего анализа. Например, осуществить дискретизацию сигнала для его обработки на цифровых ЭВМ.

2. Выполнить собственно статистический анализ преобразованной функции $u(t)$. В результате будет получена необходимая статистическая характеристика Φ_u .

Как правило, при проведении статистического анализа преобразованного сигнала $u(t)$ ограничиваются определением наиболее распространенных статистических характеристик:

Математическое ожидание:

$$\bar{\mu}_u = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (4.1)$$

Дисперсия

$$\bar{\sigma}_u^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{\mu}_u)^2 du \quad (4.2)$$

Автокорреляционная функция

$$\bar{B}_{uu}(\tau) = \frac{1}{T} \int [u(t) - \bar{\mu}_u][u(t + \tau) - \bar{\mu}_u] dt \quad (4.3)$$

Спектральная плотность, для определения которой используются разные алгоритмы, например:

$$\bar{E}(f) = \frac{\int_0^T u^2(t, f, \Delta f) dt}{T \cdot \Delta f} \quad (4.4)$$

3. Произвести восстановление статистической характеристик изучаемого процесса $\vartheta(t)$ по характеристикам процесса $u(t)$.

Например, исследуется спектр $E(f)$ по сигналу, полученному с помощью термопары. В этом случае необходимо учитывать амплитудно-частотную характеристику термопары, график которой изображен на рис.4.2

Рис.4.2

Здесь $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fM)^2}}$ - амплитудно-частотная характеристика термопары,

M – постоянная времени термопары.

Тогда $E_u(f)$ – экспериментально определенный спектр величины $u(t)$ отличается от $E_\vartheta(f)$ - истинного спектра величины $\vartheta(t)$ тем, что имеет завал в области высоких частот (сплошная кривая на рис.4.3). Восстановление спектра $E_\vartheta(f)$ производится по известной формуле:

$$E_\vartheta(f) = \frac{E_u(f)}{H(f)^2} \quad (4.5)$$

Рис.4.3

4.2. Оценки и их свойства.

На практике мы получаем статистические характеристики процесса $u(t)$ обработкой реализации конечной длины T (рис.4.5)

Рис.4.4

Из условия эргодичности следует, что только при $T \rightarrow \infty$ мы можем получить точное значение Φ_u . Путем обработки сигнала на конечном интервале мы получаем величину $\tilde{\Phi}_u$, называемую оценкой величины Φ_u . В принципе всегда $\tilde{\Phi}_u \neq \Phi_u$.

В лучшем случае мы можем говорить, что между теоретическим значением Φ_u и его оценкой $\tilde{\Phi}_u$ существует приближенное равенство.

Источники погрешностей оценивания:

- 1) погрешности приборов и отсчетов по ним (не рассматриваем).
- 2) погрешности, связанные с конечностью T и выбранной методикой оценивания, то есть с выбранным способом статистической обработки. Для характеристики точности оценивания вводятся следующие критерии

4.2.1. Смещенность оценки

Проведем мысленный эксперимент: повторяем опыты N раз и, в принципе, - каждый раз получаем разные оценки $\tilde{\Phi}_i$ (рис.4.5).

Рис.4.5

$\tilde{\Phi}_i$ - реализации случайной величины, имеющей свою функцию распределения $\rho(\tilde{\Phi})$.

Оценка $\tilde{\Phi}$ некоторого параметра Φ называется несмещенной, если:

$$M[\tilde{\Phi}] = \Phi \quad (4.6)$$

Величина $S[\tilde{\Phi}] = M[\tilde{\Phi}] - \Phi$ называется смещением оценки.

Оценка $\tilde{\Phi}$ является смещенной, если $S[\tilde{\Phi}] \neq 0$. Смещение характеризует систематическую ошибку принятой методики нахождения оценки. Иногда систематическая ошибка связана просто с недостаточной длительностью реализации T , и при увеличении T $S[\tilde{\Phi}] \rightarrow 0$.

Оценка $\tilde{\Phi}$ называется асимптотически несмещенной, если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M[\tilde{\Phi}] = \Phi \quad (4.7)$$

4.2.2. Состоятельность оценки.

Понятие «состоятельности оценки» иллюстрирует рис. 4.6. Пусть имеем реализации случайного процесса длиной T_1 (рис.4.6,а). Полученные оценки $\tilde{\Phi}_i$ характеризуются значительным смещением, да и дисперсия оценок (разброс оценок) весьма велика.

Увеличим длину реализации $T_2 > T_1$. при этом иногда (но не всегда) оценка $\tilde{\Phi}$ может улучшиться (рис. 4.6,б) : ее дисперсия и смещение становятся меньше, то есть оценка $\tilde{\Phi}$ приближается к истинному значению Φ .

Оценка $\tilde{\Phi}$ называется состоятельной, если при увеличении длины реализации T (объема выборки) оценка $\tilde{\Phi}$ стремится к оцениваемому параметру Φ

Рис.4.6

.Обычно состоятельность оценки формулируют так:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M[(\tilde{\Phi} - \Phi)^2] = 0 \quad (4.8)$$

Покажем, что средний квадрат отклонения равен:

$$M[(\tilde{\Phi} - \Phi)^2] = \sigma^2(\tilde{\Phi}) + s^2(\tilde{\Phi}) = \sigma_{\tilde{\Phi}}^2 + s_{\tilde{\Phi}}^2 \quad (4.9)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} M[(\tilde{\Phi} - \Phi)^2] &= M[(\tilde{\Phi} - M(\tilde{\Phi}) + M(\tilde{\Phi}) - \Phi)^2] = M(\tilde{\Phi} - M(\tilde{\Phi}))^2 + \\ &+ 2M(\tilde{\Phi} - M(\tilde{\Phi}))(M(\tilde{\Phi}) - \Phi) + M(M(\tilde{\Phi}) - \Phi)^2 = \sigma^2(\tilde{\Phi}) + s^2(\tilde{\Phi}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, если оценка несмещенная ($s = 0$), то для доказательства ее состоятельности достаточно показать, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^2(\tilde{\Phi}) = 0$

4.2.3. Эффективность оценки.

Пусть мы имеем реализацию $u(t)$ конечной длины и хотим по этой реализации получить некую оценку $\tilde{\Phi}$. Это можно сделать различными способами, применяя различные методики нахождения оценок. Какая из оценок лучше? Та, которая при данной длине реализации ближе других приближается к истинному значению параметра Φ .

Оценка $\tilde{\Phi}$ называется наиболее эффективной по отношению к другим оценкам, если средний квадрат ее отклонения минимален;

$$\delta_{\tilde{\Phi}}^2 = M[(\tilde{\Phi} - \Phi)^2] = \sigma_{\tilde{\Phi}}^2 + s_{\tilde{\Phi}}^2 = \min \quad (4.11)$$

4.3. Оценка математического ожидания (оценка среднего значения).

4.3.1. Оценка математического ожидания. На примере оценки математического ожидания проиллюстрируем общий подход к проблеме получения достоверных

оценок моментов различных порядков. Имеем реализацию $u(t)$ стационарного эргодического процесса на интервале T . Выборочное среднее оценим так:

$$\bar{\mu}_u = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (4.12)$$

Оценка (4.12) является несмещенной:

$$M[\bar{\mu}_u] = M\left[\frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt\right] = \frac{1}{T} \int_0^T M[u(t) dt] = \mu_u$$

$\mu_u = const$ для стационарного процесса, $s_{\mu_u} = 0$ независимо от длины реализации T .

Докажем, что оценка является состоятельной. Поскольку $s=0$, достаточно доказать, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{\mu}}^2 = 0$.

Без доказательства приведем формулу для расчета дисперсии оценки математического ожидания :

$$\sigma_{\bar{\mu}}^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_{uu}(\tau) d\tau \quad (4.13)$$

Для состоятельности оценки необходимо, чтобы $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{\mu}}^2 = 0$

Здесь $B_{uu}(\tau) = \overline{(u(t) - \mu_u)(u(t + \tau) - \mu_u)}$ - теоретическое значение корреляционной функции пульсаций.

Следует иметь в виду, что для случайного процесса $B_{uu}(\tau)$ отлична от нуля в пределах $\tau < \tau_{max}$, (см. рис. 4.7), причем обычно $\tau_{max} \ll T$.

Рис.4.7

Следовательно интеграл в (4.13) - сходится. С учетом этого

$$\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_{uu}(\tau) d\tau \cong \int_0^{\tau_{max}} B_{uu}(\tau) d\tau \cong \int_0^{\infty} B_{uu}(\tau) d\tau = \Lambda \cdot \sigma_u^2 \quad (4.14)$$

где $\Lambda = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) d\tau$ - временной макромасштаб.

С учетом (4.14) получаем простую формулу для дисперсии оценки среднего

$$\sigma_{\bar{\mu}}^2 \cong \frac{\Lambda}{T} \sigma_u^2 \quad (4.15)$$

Замечания:

- 1) Оценка $\bar{\mu}_u$ является состоятельной.
- 2) Для получения хорошей точности необходимо, чтобы интервал осреднения T был много больше интервала корреляции (временного макромасштаба).
- 3) Ситуация, характерная для математической статистики: для оценивания точности определения момента первого порядка необходимо априори знать моменты второго порядка:

4) Можно показать, что данная оценка - наиболее эффективна.

4.3.2. Сглаживание оценки выборочного среднего.

Для улучшения оценки (снижения дисперсии т.к. $s=0$) существуют различные пути:

- 1) Выбрать более эффективную оценку, которая при данной длине реализации T дает меньшую дисперсию. В данном случае этот путь не годится, т.к. данная оценка является наиболее эффективной.
- 2) Увеличить длину реализации T . Это (см. формулу 4.15) до известных пределов может снизить $\sigma_{\bar{u}}^2$. Однако не всегда это возможно на практике.
- 3) Сгладить по ансамблю. Имеем ансамбль $u_i(t)$ нескольких реализаций одинаковой длины T_i . Тогда для каждой реализации:

$$\bar{u}_{u_i} = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} u(t) dt ; \quad \sigma_{\bar{u}_i}^2 \approx \frac{\tau}{T_i} \sigma_u^2$$

Введем оценку $\bar{u}_u = \frac{\sum_i \bar{u}_{u_i}}{N}$. Получим также несмещенную оценку, имеющую

дисперсию $\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{\sigma_{\bar{u}_i}^2}{N}$, т.е. « N » реализаций T_i эквивалентны одной реализации длиной $T = N \cdot T_i$.

4.4.Оценивание спектральной плотности

4.4.1. Оценивание по методу фильтрации.

Пусть мы имеем фильтр с полосой пропускания B_e на частоте f . Тогда, пропустив сигнал $u(t)$ через фильтр, получим сигнал $u(t, f, B_e)$, оценка дисперсии которого находится возведением в квадрат и интегрированием (рис.4.8):

$$\sigma_u^2(f, B_e) = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t, f, B_e) dt \quad (4.16)$$

Рис.4.8

И спектральная плотность сигнала на этой частоте равна:

$$\bar{E}(f) = \frac{\sigma_u^2(f, B_e)}{B_e T} = \frac{1}{B_e T} \int_0^T u^2(t, f, B_e) dt \quad (4.17)$$

Является ли эта оценка несмещенной?

$$M[\bar{E}(f)] = \frac{1}{B_e T} \int_0^T M[u^2(t, f, B_e)] dt = \frac{1}{B_e T} \int_0^T \sigma_u^2(f, B_e) dt = \frac{1}{B_e} \int_{f-\frac{B_e}{2}}^{f+\frac{B_e}{2}} E(f) df \quad (4.18)$$

Так как $M[\bar{E}(f)] \neq E(f)$, то оценка является смещенной (за исключением случая $E(f) = const$ - «белого шума»). Можно показать, что смещение оценки (см. рис.4.9) приблизительно равно:

$$S_E \approx \frac{B_e^2}{24} \frac{d^2 E(f)}{df^2} \quad (4.19)$$

Рис.4.9

Из формулы (4.14) следует, что смещение можно уменьшить, уменьшая ширину полосы пропускания фильтра B_e . Однако при уменьшении B_e возрастает дисперсия оценки:

$$\sigma_E^2 \approx \frac{E_{uu}^2(f)}{B_e T},$$

Чтобы этого избежать, при уменьшении B_e необходимо увеличивать время интегрирования T (своеобразное «соотношение неопределенности» - $B_e T \approx idem$).

Можно использовать метод «стягивания полосы фильтра». В этом случае сначала исследуют спектр в общем, используя фильтр с широкой полосой пропускания B_e и получают результат изображенный пунктирной линией на рис.4.10. Затем наиболее интересные участки спектра, где наблюдаются всплески или провалы, исследуют с использованием фильтра с более узкой полосой пропускания $(B_e)_1$, одновременно увеличивая время наблюдения.

Рис.4.10

4.4.2. Оценивание по методу «периодограммы».

Реализацию процесса $u(t)$ на конечном интервале T разложим в ряд Фурье:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{i2\pi f_k t} \quad (4.20)$$

$$Z_k = \frac{1}{T} \int u(t) e^{-2\pi f_k t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cos(2\pi f_k t) dt - \frac{i}{T} \int u(t) \sin(2\pi f_k t) dt = a_k - ib_k \quad (4.21)$$

Линейчатый спектр процесса $u(t)$ (рис.4.11):

$$F_k = Z_k Z_k^* = a_k^2 + b_k^2$$

Положительно определенная спектральная плотность (см.рис.4.13):

$$\tilde{E}(f) = \frac{E_k}{\Delta f} = \frac{E_k}{B_e} = \frac{2F_k}{B_e} = 2T(a_k^2 + b_k^2) \quad (4.22)$$

или

$$\tilde{E}(f) = \frac{2}{T} \left[\left(\int_0^T u(t) \cos(2\pi ft) dt \right)^2 + \left(\int_0^T u(t) \sin(2\pi ft) dt \right)^2 \right] \quad (4.23)$$

так называемая «периодограмма», представляющая собой оценку спектральной плотности

Является ли эта оценка несмещенной ?

$$M[\tilde{E}(f)] = M \left[\frac{1}{T} \left(\int_0^T u(t) e^{-i2\pi ft} dt \right)^2 \right] = M \left[\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T u(t_1) u(t_2) e^{i2\pi f(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \right]$$

или

$$M[\tilde{E}(f)] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) e^{-2\pi f\tau} B_{uu}(\tau) d\tau \quad (4.24)$$

при $T \rightarrow \infty$ имеем

$$M[\tilde{E}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} B_{uu}(\tau) d\tau = E(f) \quad (4.25)$$

То есть, оценка спектра по методу периодограммы является асимптотически несмещенной.

Дисперсия оценки равна:

$$\sigma_E^2 \cong \frac{E_{uu}^2(f)}{B_e T} = E_{uu}^2(f) \quad \text{поскольку } B_e = \frac{1}{T}.$$

То есть, оценка спектра по методу «периодограммы» несостоятельна. Дисперсия не зависит от длины реализации T . С ростом T увеличивается только количество a_k и b_k , но их дисперсия не уменьшается.

Способы сглаживания:

а) Осреднение по ансамблю:

Имеем ансамбль « N » реализаций одинаковой длины T_i . Тогда сглаженная оценка спектра $\bar{E}_{uu}(f)$ есть среднее арифметической оценок, полученных обработкой каждой отдельной i -ой реализации:

$$\bar{E}_{uu}(f) = \frac{1}{N} \sum_N \tilde{E}_{uu}(f)$$

Однако, T_i должны быть достаточно большими, чтобы смещение было приемлемым:

$$S_E = M[\tilde{E}(f)] - E(f) \quad \text{или см. (4.24):}$$

$$S_E = \int_{-T_i}^{T_i} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_i} \right) e^{-2\pi f\tau} B_{uu}(\tau) d\tau - E(f) \quad (4.26)$$

б) Сглаживание «по полосе частот»:

$$\bar{E}(f) = \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{f + \frac{\Delta f}{2}} \tilde{E}(g) dg \quad (4.27)$$

4.4.2. Оценивание на основании теоремы Винера-Хинчина.

По теореме Винера-Хинчина функции $B_{uu}(\tau)$ и $E_{uu}(f)$ связаны взаимным преобразованием Фурье:

$$B_{uu}(\tau) = \int_0^{\infty} E(f) \cos(2\pi f\tau) df \quad (4.28)$$

$$E_{uu}(f) = \int_0^{\infty} B_{uu}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$$

Поэтому для получения оценки спектральной плотности представляется естественным воспользоваться оценкой $\tilde{B}_{uu}(\tau)$ ():

$$\tilde{E}_{uu}(f) = \int_0^T \tilde{B}_{uu}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (4.29)$$

где T – конечный интервал, на котором известна оценка $\tilde{B}_{uu}(\tau)$.

Однако на самом деле все гораздо сложнее. Действительно, формулы (4.28) однозначно связывают между собой теоретические (истинные) функции $B_{uu}(\tau)$ и $E_{uu}(f)$, нам неизвестные. Мы оперируем только оценками этих функций. Поэтому возникает вопрос: к каким последствиям может привести попытка оценить спектральную плотность по формуле (4.29), в которой фигурирует оценка автокорреляционной функции $\tilde{B}_{uu}(\tau)$, с присущими ей погрешностями, и известная нам, как только что отмечалось, лишь на конечном временном отрезке T .

Выражение (4.29) эквивалентно выражению:

$$\tilde{E}_{uu}(f) = \int_0^{\infty} w(\tau) \tilde{B}_{uu}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau, \quad (4.30)$$

где $w(\tau)$ – «корреляционное окно»; в данном случае – прямоугольное окно (рис.4.14):

$$w_n(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \leq T \\ 0 & \text{при } \tau > T \end{cases} \quad (4.31)$$

Рис.4.14

Смысл корреляционного окна заключается в следующем: мы как бы “просматриваем” корреляционную функцию, существующую, строго говоря, на бесконечном интервале τ , через окно ограниченной ширины размером T .

Соответствующее прямоугольному окну (4.31) спектральное окно:

$$W_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\tau) e^{i2\pi f\tau} d\tau = 2T \left(\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} \right) \quad (4.32)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(f) df = w(0) = 1$$

По теореме о свертке (теореме Парсеваля):

$$\tilde{E}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1) E(f - f_1) df_1 = \int_{-\infty}^{\infty} W(f - f_1) E(f_1) df_1,$$

спектральная оценка есть результат “просматривания” спектра через спектральное окно $W(f)$.

Спектральное окно $W_n(f)$ прямоугольного корреляционного окна – очень плохое. При его использовании вследствие «просачивания» энергии через боковые «хвосты» окна получаются ложные пики. Для улучшения результата используются другие окна, например окно Бартлетта и окно Парзена, приведенные в таблице 4.1. Форма корреляционных окон сравнивается на рис. 4.11. Однако более показательным является рис. 4.12. На этом рисунке сопоставляется форма различных спектральных окон. Очевидны преимущества окон Бартлетта и Парзена по сравнению с прямоугольным окном. Использование этих окон, в отличие от последнего, не приводит к появлению ложных пиков в спектральных оценках.

Таблица 4.1.

Таблица

| Название окна | $w(\tau)$ | $W(f)$ |
|---------------|--|--|
| Бартлетта | $w_B = \begin{cases} 1 - \frac{ \tau }{T} & \tau \leq T \\ 0 & \tau > T \end{cases}$ | $W_B(f) = T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2$ $-\infty < f < \infty$ |
| Парзена | $w_p = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 + 6\left(\frac{ \tau }{T}\right)^3 & \text{при } \tau \leq \frac{T}{2} \\ 2\left(1 - \frac{ \tau }{T}\right)^3 & \text{при } \frac{T}{2} \leq \tau \leq T \\ 0 & \text{при } \tau > T \end{cases}$ | $W_P(f) = \frac{3}{4} T \left(\frac{\sin \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}} \right)^4$ $-\infty < f < \infty$ |

Все оценки, полученные с помощью этих окон асимптотически несмещенные: при $T \rightarrow \infty$ $M[\hat{E}(f)] \rightarrow E(f)$, $S_E \rightarrow 0$.

Это соответствует преобразованию спектрального окна $W(f)$ в δ -функцию (бесконечно узкий фильтр). Однако, при этом возрастает дисперсия оценки.

$$\sigma_E^2 \approx \frac{E^2(f)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(f) df = \frac{E^2(f)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau) d\tau$$

Например для окна Бартлетта:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_B^2(\tau) d\tau = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)^2 d\tau = \frac{2}{3} T$$

Надо сказать, что рассматриваемые окна Бартлетта и Парзена приведены нами для примера. По-видимому, они были самыми первыми окнами, использовавшимися для сглаживания спектральных оценок. В более поздней литературе (например, / /) предлагаются и другие окна, вероятно более эффективные. Однако, как мы понимаем, сути дела это не меняет.

Иногда сам подход, предполагающий использование корреляционных и спектральных окон при оценивании спектров, вызывает у читателя недоумение. (Авторам это известно из давнего собственного опыта). Действительно, разве это не странно, что взятые “из головы” окна могут улучшить качество оценки спектра турбулентности, являющегося объективной реальностью ?

На самом деле в наших действиях с окнами субъективизма не больше, чем, скажем, при выборе ширины полосы пропускания B_1 и типа полосового фильтра в случае спектрального анализа с помощью аналоговой аппаратуры. Кроме того, необходимо учитывать, что относительная погрешность измеренной автокорреляционной функции $\tilde{B}(\tau)$ тем выше, чем больше τ . Известно, например, что на “хвосте” оценки $\tilde{B}(\tau)$ при больших τ часто появляются ложные осцилляции, не связанные с характером исследуемого процесса. Поэтому умножение $\tilde{B}(\tau)$ в формуле (4.30) на любое корреляционное окно $w(\tau)$ (кроме прямоугольного, улучшает качество оценки $\tilde{B}(\tau)$, дискриминируя ее наименее достоверную часть, соответствующую большим τ .

В заключение данного раздела хочется дать читателю два совета:

Во-первых, для доказательства достоверности спектрального анализа пользуйтесь несколькими способами получения оценок и сопоставляйте результаты между собой.

Во-вторых, относитесь с большой осторожностью как к собственным результатам спектрального анализа, так и к спектральным оценкам других авторов.

Гл 5. ВЫРОЖДЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТИ

5.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

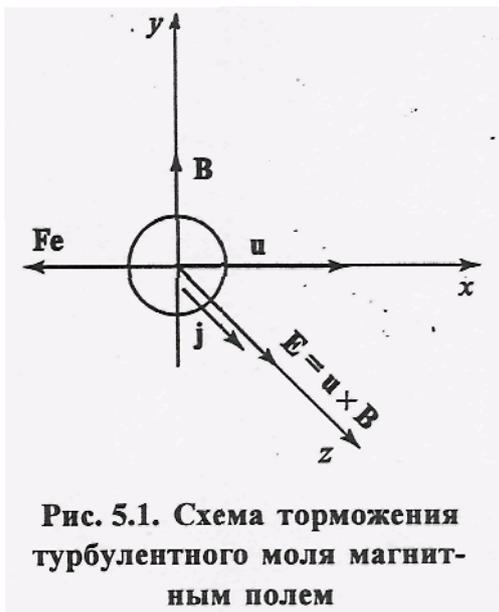
В 3 главе показано, что турбулентность как статистический ансамбль характеризуется бесконечной совокупностью многомерных моментов и поэтому система осредненных уравнений, описывающих турбулентное движение, содержит бесконечное число уравнений. Практически при исследовании турбулентности эту систему приходится обрывать, обычно на уравнениях для моментов второго или третьего порядка. При этом система уравнений, описывающих турбулентное течение, становится незамкнутой, так как уравнение для моментов N -ого порядка содержит моменты $N + 1$ -го порядка. Для замыкания этой системы уравнений необходимо с помощью каких-либо гипотез моменты $N + 1$ -го порядка выразить через моменты более низкого порядка. Очевидно, что используемые гипотезы и получаемые с их помощью результаты в каждом конкретном случае нуждаются в экспериментальной проверке. Поэтому любая статистическая теория турбулентности является полуэмпирической. В теоретическом плане наибольшие успехи достигнуты при исследовании закономерностей однородной турбулентности. «Обычная» (без магнитного поля) однородная турбулентность, изолированная от внешних воздействий (без подвода энергии), вырождающаяся под действием вязкой диссипации, стремится к изотропному состоянию, даже если в начальный момент она была анизотропной.

Естественно, представляет интерес задача о вырождении однородной МГД-турбулентности. Для замыкания системы уравнений МГД-турбулентности необходимо еще большее число гипотез, чем при замыкании системы уравнений «обычной» турбулентности. Наличие большого числа гипотез существенно затрудняет экспериментальную проверку каждой из них в отдельности и оставляет место для сомнений в случае любых теоретически полученных результатов. При решении системы уравнений, описывающих МГД-турбулентность, различные авторы использовали разные гипотезы, правдомерность которых, как всегда, является достаточно спорной. И результаты, получаемые различными авторами, существенно отличаются между собой. Так, в соответствии с анализом, выполненным в работах [16-18], МГД-турбулентность в процессе вырождения остается изотропной. В работе [20] утверждается, что под действием магнитного поля преимущественно подавляется продольная по отношению к полю пульсационная компонента скорости. В нашей работе [19] утверждается обратное - магнитное поле в первую очередь подавляет поперечные компоненты пульсаций скорости.

Развитие процесса вырождения первоначально однородной и изотропной турбулентности при наложении на нее внешнего однородного магнитного поля можно представить себе следующим образом. Внешнее магнитное поле выделяет в пространстве некоторое преимущественное направление, и поле скорости в этих условиях уже не может оставаться изотропным. В результате взаимодействия пульсационного движения жидкости с магнитным полем в жидкости возникают пульсационные электрические токи, сопровождающиеся возникновением пульсационного магнитного поля. При этом часть энергии пульсационного поля скорости передается пульсационному магнитному полю, и, кроме того, появляется дополнительный механизм диссипации энергии, обусловленный джоулевой диссипацией энергии. Поэтому следует ожидать, что скорость вырождения турбулентности в магнитном поле будет более высокой по сравнению со скоростью вырождения в отсутствие поля. Так как передача энергии от разных компонент пульсационной скорости к пульсациям магнитного поля происходит с различной интенсивностью, то первоначально изотропное поле скорости становится анизотропным. Как будет показано ниже, магнитное поле также оказывает воздействие и на спектры турбулентных пульсаций скорости.

В работе [19] механизм взаимодействия поля пульсационных скоростей и магнитного поля при вырождении однородной турбулентности проанализирован без привлечения каких-либо гипотез с помощью уравнений баланса энергии компонент поля скорости и энергии компонент пульсационного магнитного поля. Такой подход позволяет лучше понять процессы, протекающие при вырождении однородной турбулентности в магнитном поле, а также проанализировать физический смысл гипотез, используемых при решении этой задачи различными авторами.

Вначале рассмотрим механизм воздействия магнитного поля на турбулентность и ожидаемые последствия этого воздействия в самых общих чертах. Хорошо известно, что магнитное поле не оказывает никакого влияния на движение проводящей среды вдоль силовых линий и тормозит любое движение поперек силовых линий магнитного поля. Механизм этого торможения можно пояснить следующим примером. Пусть жидкая частица (турбулентный моль) движется со скоростью \mathbf{u} в положительном направлении оси x в присутствии магнитного поля с индукцией \mathbf{B} , направленного в положительном направлении оси y . (рис. 5.1). При этом в частице индуцируется электрическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, направленное в положительном направлении оси z . Благодаря проводимости внешней среды электрическая цепь оказывается каким-либо образом замкнутой и в движущейся частице появляется ток $\mathbf{j} \approx \mathbf{E} \approx u\mathbf{B}$, направленный также в положительном направлении оси z . Появление электрического тока сопровождается возникновением пондеромоторной силы $\mathbf{F}_e = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \approx u\mathbf{B}^2$, направленной в отрицательном направлении оси x .



Пондеромоторная сила во всех случаях направлена против вектора скорости и, тем самым, всегда тормозит движение, с которого начинается рассматриваемый выше процесс.

Таким образом, приступая к анализу воздействия магнитного поля на турбулентный поток, заранее знаем, что магнитное поле должно подавлять пульсации скорости, характерные для турбулентного течения жидкости. Из рассмотренного примера достаточно очевидно, что магнитное поле подавляет только те компоненты пульсационной скорости, которые перпендикулярны вектору индукции магнитного поля, и непосредственно не влияет на продольную по отношению к полю компоненту, так как в этом случае $\mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$.

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую схему поведения первоначально изотропной турбулентности в магнитном поле. Воздействие магнитного поля на турбулентность начинается с подавления поперечных по отношению к полю компонент пульсационной скорости. Благодаря возникающей при этом анизотропии начинается обмен энергией между компонентами пульсационной скорости. В этом процессе, естественно, продольная компонента отдает энергию поперечным компонентам пульсаций скорости. Таким образом, магнитное поле, непосредственно взаимодействуя только с поперечными компонентами пульсаций, подавляет и поперечные и продольную компоненты пульсационной скорости. Согласно этой схеме в процессе вырождения однородная МГД-турбулентность становится анизотропной, причем интенсивность (энергия) продольной компоненты пульсаций скорости все время остается большей, чем интенсивность поперечных о пульсационных компонент.

Иная схема воздействия магнитного поля на однородную турбулентность была предложена сотрудниками Института физики АН Латвийской ССР [20]. Идея этой схемы базировалась на отождествлении турбулентного вихря с твердым электропроводным волчком. При вращении такого волчка в магнитном поле в нем индуцируются электрические токи и возникающие при этом пондеромоторные силы стремятся повернуть волчок таким образом, чтобы его ось вращения стала параллельной направлению магнитного поля. При этом протекание токов в волчке прекращается и магнитное поле перестает воздействовать на него. Если предположить, что все турбулентные вихри в соответствии с рассмотренной схемой развернутся своими осями вращения вдоль магнитного поля, то в потоке останутся только поперечные по отношению к полю компоненты, пульсаций скорости, т.е. в соответствии с такой схемой под действием магнитного поля должна «исчезнуть» продольная компонента пульсаций скорости и в результате возникает так называемая двумерная турбулентность.

Очевидно, что две рассмотренные схемы являются взаимно исключающими. Приведенный анализ подтверждает справедливость первой из этих схем.. Двумерная турбулентность, как показывают результаты ряда экспериментов, может возникать при определенных граничных условиях. Но применительно к однородной безграничной турбулентности вторая схема оказывается неверной. По-видимому, результаты, полученные для единичного вихря, нельзя распространять на ансамбль, состоящий из большого числа вихрей.

5.2. Анализ вырождения однородной МГД-турбулентности методом энергетического баланса.

Перейдем теперь к более подробному анализу поставленной задачи. Будем рассматривать процесс вырождения однородного первоначально изотропного турбулентного поля скорости электропроводной жидкости, на которое наложено однородное внешнее магнитное поле с индукцией \mathbf{V} . Напомним, что однородной называется такая турбулентность, осредненные характеристики которой не зависят от пространственных координат. Эту задачу удобнее рассматривать, используя тензорную символику. При этом условие однородности запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\dots) = 0 \quad (5.1)$$

Так как исходная турбулентность является изотропной, то средняя скорость течения должна быть равна нулю. Поэтому в дальнейшем u_j - это компоненты пульсационной скорости. Магнитное поле в любой точке потока складывается из постоянного (не зависящего ни от времени, ни от координат) внешнего поля V_k и индуцированной пульсационной компоненты b_k . Система уравнений, описывающих динамику турбулентности в несжимаемой электропроводной жидкости, включает в себя уравнения

неразрывности, движения, энергии и индукции (...). В тензорной записи эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0; \quad (5.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \varepsilon_{ikl} j_k (B_l + b_l); \quad (5.3)$$

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + \tau_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{j_k j_k}{\sigma}; \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial t} = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{lmn} u_m (B_n + b_n) + v_m \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (5.5)$$

В уравнение энергии помимо джоулевой диссипации включено слагаемое $\tau_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$,

учитывающее вязкую диссипацию энергии.

Преобразуем некоторые слагаемые, входящие в эту систему. Пульсационный ток, фигурирующий в уравнениях (5.3) и (5.4), выразим через пульсационное магнитное поле в соответствии с первым уравнением Максвелла

$$j_k = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial b_n}{\partial x_m}. \quad (5.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ikl} j_k (B_l + b_l) &= \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{kmn} \frac{1}{\mu} \frac{\partial b_n}{\partial x_m} (B_l + b_l) = \\ &= (\delta_{lm} \delta_{in} - \delta_{ln} \delta_{im}) \frac{1}{\mu} (B_l + b_l) \frac{\partial b_n}{\partial x_m} = \frac{1}{\mu} (B_l + b_l) \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_l} - \frac{\partial b_l}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Проделав аналогичную операцию с первым слагаемым в правой части уравнения (5.5), получим:

$$\varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{lmn} u_m (B_n + b_n) = (B_k + b_k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k}.$$

Джоулева диссипация энергии — последнее слагаемое в уравнении (5.4) при соответствующей подстановке приобретает вид

$$\frac{j_k j_k}{\sigma} = \frac{1}{\sigma \mu^2} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial b_n}{\partial x_m} \varepsilon_{krs} \frac{\partial b_s}{\partial x_r} = \frac{1}{\sigma \mu^2} \left(\frac{\partial b_n}{\partial x_m} \frac{\partial b_n}{\partial x_m} - \frac{\partial b_n}{\partial x_m} \frac{\partial b_m}{\partial x_n} \right).$$

И наконец, вязкая диссипация энергии при выражении компонент тензора вязких напряжений в соответствии с законом Навье—Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\tau_{kl} = \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

преобразуется к виду

$$\tau_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

В результате подстановки полученных выражений в систему (5.3)- (5.5) имеем:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{\mu} (B_k + b_k) \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right); \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial t} = (B_k + b_k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\sigma \mu} \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_k \partial x_k}; \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \\ &+ \frac{1}{\sigma \mu^2} \left(\frac{\partial b_k}{\partial x_l} \frac{\partial b_k}{\partial x_l} - \frac{\partial b_k}{\partial x_l} \frac{\partial b_l}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Положим вначале, что индуцированное магнитное поле существенно меньше приложенного и в выражении $(B_k + b_k)$ пренебрежем пульсационными компонентами b_k . Ниже отдельно проанализируем физический смысл отбрасываемых при этом слагаемых.

Умножим уравнение (5.7) на u_i , а уравнение (5.8) - на b_i/μ и, проведя осреднение полученных выражений и уравнения (5.9), получим уравнения, описывающие баланс энергии компонент поля скорости, компонент пульсационного магнитного поля и внутренней энергии жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{\rho u_i^2}{2}} \right) + \overline{\rho u_i u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} &= - \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \eta \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \\ &+ \frac{B_k}{\mu} \left(\overline{u_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} - \overline{u_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i}} \right); \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{b_i^2}}{2\mu} \right) = \frac{B_k}{\mu} \overline{b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \frac{1}{\mu} \overline{u_k b_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} + \frac{1}{\sigma \mu^2} \overline{b_i \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_k \partial x_k}}; \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u_k \frac{\partial T}{\partial x_k}} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_k \partial x_k} + \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \\ &+ \frac{1}{\sigma \mu^2} \left(\frac{\partial b_k}{\partial x_l} \frac{\partial b_k}{\partial x_l} - \frac{\partial b_k}{\partial x_l} \frac{\partial b_l}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

(В этих уравнениях суммирование по i не производится!)

Условия однородности (5.1) и неразрывности (5.2) позволяют показать, что некоторые слагаемые в этих уравнениях равны нулю, а другие преобразовать к виду, имеющему более ясный физический смысл:

$$\overline{u_i u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i^2 u_k}) - \frac{1}{2} \overline{u_i^2} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в соответствии с (5.1), а второе слагаемое равно нулю в соответствии с (5.2). Последующие слагаемые запишем в виде:

$$\begin{aligned} -\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p u_i}) + p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \\ \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}; \\ \overline{u_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i b_i}) - b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

аналогично

$$\overline{u_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i}} = - \overline{b_k \frac{\partial u_i}{\partial x_i}};$$

$$\overline{u_k b_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k b_i^2} \right) - \frac{1}{2} \overline{b_i^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} = 0;$$

$$\overline{b_i \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_k \partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{b_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} \right) - \overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} = - \overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial b_i}{\partial x_k}};$$

$$\overline{u_k \frac{\partial T}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k T} \right) - T \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_k \partial x_k} = 0;$$

$$\overline{\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l}} \right) - u_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}} \right) = 0 \checkmark$$

аналогично

$$\overline{\frac{\partial b_k}{\partial x_l} \frac{\partial b_l}{\partial x_k}} = 0.$$

В результате этих преобразований система (5.10) - (5.12) приобретает вид, очень удобный для трактовки физического смысла самих уравнений и входящих в них слагаемых:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{\rho u_i^2}{2}} \right) = \underbrace{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\text{II}} \underbrace{- \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\text{III}} - \underbrace{\frac{B_k}{\mu} \overline{b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}}_{\text{IV}} + \underbrace{\frac{B_k}{\mu} \overline{b_k \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}}_{\text{V}}; \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{b_i^2}{2\mu}} \right) = \underbrace{\frac{B_k}{\mu} \overline{b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}}_{\text{VII}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma \mu^2} \overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial b_i}{\partial x_k}}}_{\text{VIII}}; \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho c \overline{T}} \right) = \underbrace{\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\text{X}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma \mu^2} \overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial b_i}{\partial x_k}}}_{\text{XI}}. \quad (5.15)$$

Проанализируем физический смысл уравнений (5.13) - (5.15) и входящих в них слагаемых. Левые части этих уравнений - члены I, VI и IX представляют соответственно изменение энергии i -ой компоненты по l скорости, i -ой компоненты пульсационного магнитного поля и внутренней энергии среды.

Слагаемые II характеризуют обмен энергией между тремя компонентами поля скорости за счет пульсаций давления. Если в уравнении (5.13) произвести суммирование по i , т.е. перейти к полной энергии поля скорости, то, как следует из уравнения неразрывности, сумма этих слагаемых обратится в нуль. Аналогичные рассуждения справедливы также и по отношению к слагаемым V, описывающим обмен энергией между тремя компонентами поля скорости за счет пульсаций магнитного давления. Таким образом, члены II и V только перераспределяют энергию между тремя компонентами, не изменяя полной энергии поля скорости.

Слагаемые III характеризуют величину вязкой диссипации энергии. Аналогичные, но противоположные по знаку слагаемые фигурируют в уравнении (5.15). Таким образом, очевидно, что эти слагаемые описывают превращение части энергии поля скорости в теплоту.

Физический смысл слагаемых IV становится ясным, если усмотреть такие же, но с противоположным знаком, слагаемые VII в уравнении (5.14). Очевидно, что эти слагаемые описывают обмен энергией между компонентами пульсаций скорости и магнитного поля. Знак этих слагаемых может быть любым, т.е. возможен перенос энергии от поля скорости к магнитному полю и в обратном направлении.

И, наконец, слагаемые VIII описывают джоулеву диссипацию энергии. Такие же слагаемые, но с противоположным знаком, мы видим в уравнении баланса внутренней энергии среды.

Из проведенного анализа следует, что часто используемая трактовка двух последних слагаемых в уравнении (5.13) как джоулевой диссипации энергии неверна. Члены V вообще не имеют никакого отношения к джоулевой диссипации. А члены IV можно трактовать как джоулеву диссипацию лишь в том случае, если левая часть уравнения (5.14) пренебрежимо мала и слагаемое IV становится равным джоулевой диссипации энергии - слагаемому VIII.

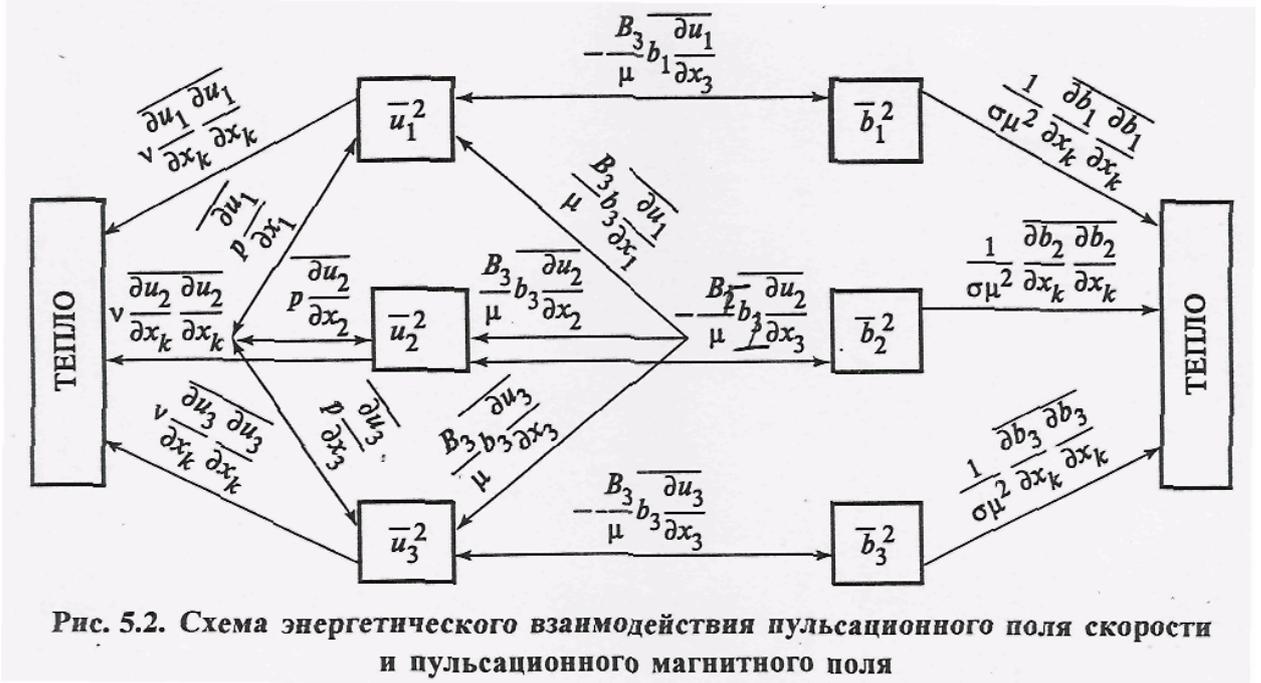
Уравнения (5.13) и (5.14) значительно упрощаются, а их анализ становится более наглядным, если одну из осей системы координат (например, ось x_3) сориентировать вдоль приложенного магнитного поля. При этом $B_1 = B_2 = 0$ и тогда/

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{\rho u_i^2}}{2} \right) = \underbrace{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\text{II}} - \underbrace{\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\text{III}} - \underbrace{\frac{B_3}{\mu} b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_3}}_{\text{IV}} + \underbrace{\frac{B_3}{\mu} b_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\text{V}}; \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{b_i^2}}{2\mu} \right) = \underbrace{\frac{B_3}{\mu} b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_3}}_{\text{VII}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma \mu^2} \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial b_i}{\partial x_k}}_{\text{VIII}}; \quad (5.17)$$

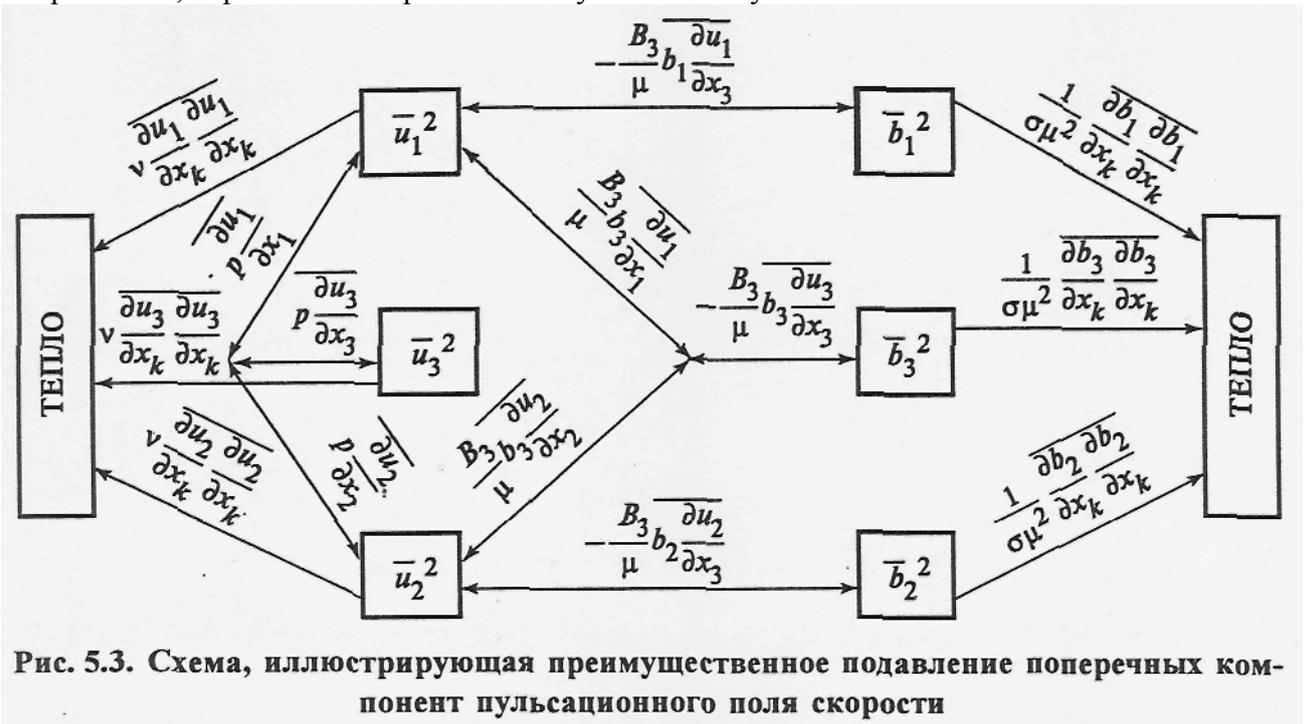
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c \overline{T}) = \underbrace{\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\text{X}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma \mu^2} \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial b_i}{\partial x_k}}_{\text{XI}}. \quad (5.18)$$

Энергетическое взаимодействие компонент поля скорости и пульсационного магнитного поля в соответствии с уравнениями (5.16)-(5.18) можно наглядно проиллюстрировать схемой, изображенной на рис. 5.2.



Как видно из рисунка, энергия, подводимая к продольной по отношению к магнитному полю компоненте пульсаций скорости u_3 за счет электромагнитного взаимодействия, в точности равна энергии, отводимой от нее к соответствующей компоненте пульсационного магнитного поля. Поэтому эту схему можно представить несколько иначе, так, как это показано на рис. 5.3.

Схема, изображенная на рис. 5.3, позволяет провести качественный анализ влияния магнитного поля на первоначально изотропную турбулентность. Как следует из схемы, магнитное поле *непосредственно* не взаимодействует с продольной по отношению к полю компонентой пульсаций скорости u_3 . Этот же вывод следует прямо из уравнения движения, так как электромагнитная сила не входит в проекцию уравнения движения на направление, параллельное приложенному магнитному полю.



Таким образом, магнитное поле вначале начинает подавлять только поперечные компоненты пульсаций скорости. В результате возникающей при этом анизотропии вступает в действие механизм обмена энергией между компонентами пульсаций скорости за счет пульсаций обычного «гидродинамического» и магнитного давлений – слагаемые Π и V , и начинает отбираться энергия и от продольной компоненты. Следовательно, в процессе вырождения МГД-турбулентности энергия продольной компоненты пульсаций скорости все время остается выше, чем энергия поперечных компонент.

В зависимости от соотношения интенсивностей отдельных процессов обмена энергией вырождение МГД-турбулентности может протекать по-разному. Например, если интенсивность вязкой и джоулевой диссипации энергии примерно одинакова, то в процессе энергетического взаимодействия энергетические связи между полем скорости и магнитным полем должны ослабевать. Так как эти энергетические связи

пропорциональны производным $\partial/\partial x_3$, то такому состоянию соответствует подавление градиентов пульсационных величин вдоль поля. Строгое доказательство такого поведения спектров – превращения их в двумерные, дано в работе [17]. При этом прекращается и обмен энергией между продольной и поперечными компонентами пульсаций скорости,

так как $\overline{p \partial u_3 / \partial x_3} = 0$. Таким образом, при вырождении МГД-турбулентности может наступить такое состояние (рис. 5.4), при котором спектры всех пульсационных величин вырождаются в двумерные ($\partial/\partial x_3 = 0$), продольная и поперечные компоненты

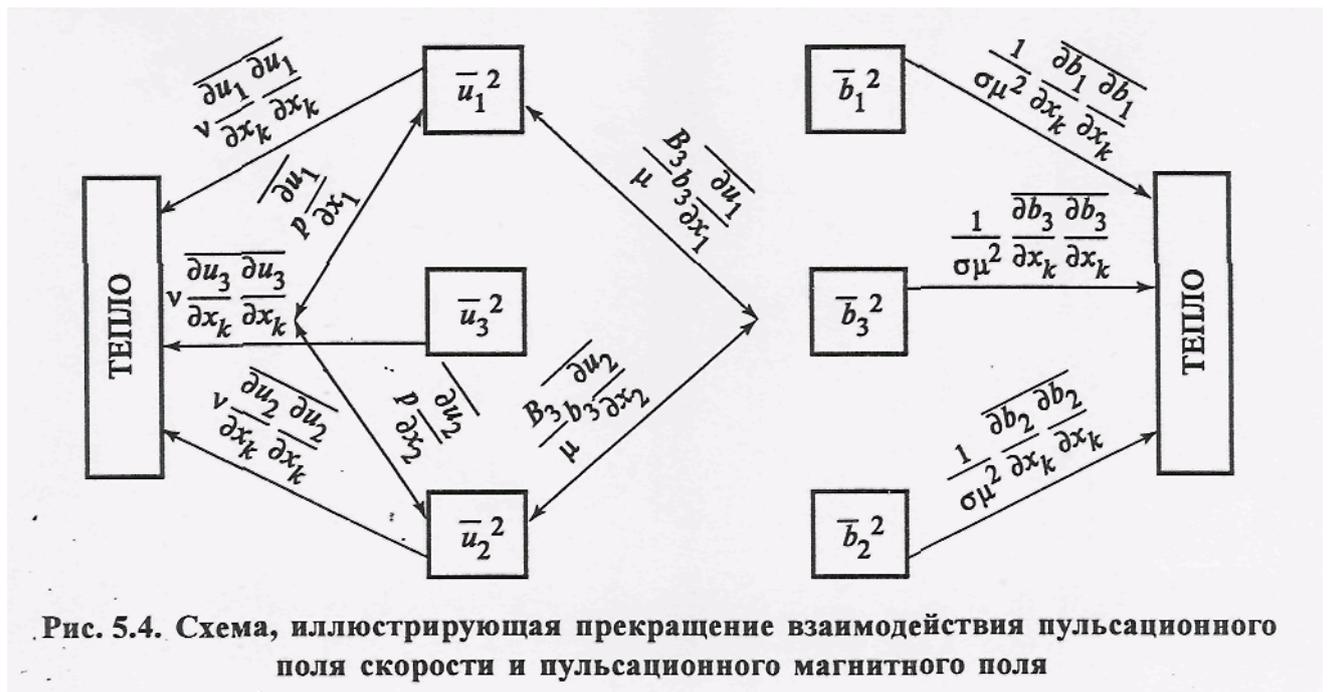


Рис. 5.4. Схема, иллюстрирующая прекращение взаимодействия пульсационного поля скорости и пульсационного магнитного поля

пульсаций скорости, не взаимодействуя между собой, вырождаются под действием вязких сил, а пульсационное магнитное поле вырождается под действием джоулевой диссипации.

При выводе уравнений баланса энергии для большей наглядности мы пренебрегали пульсационным магнитным полем b_k по сравнению с приложенным полем B_k . Дополнительные энергетические связи, обусловленные отбрасываемыми при этом слагаемыми, изображены на схеме, показанной на рис. 5.5. Очевидно, что если в какой-то момент убрать внешнее магнитное поле, то взаимодействие поля скорости и магнитного поля будет обусловлено только этими связями.

Переходя к анализу допущений, используемых различными авторами при решении системы уравнений (5.2)-(5.5), рассмотрим

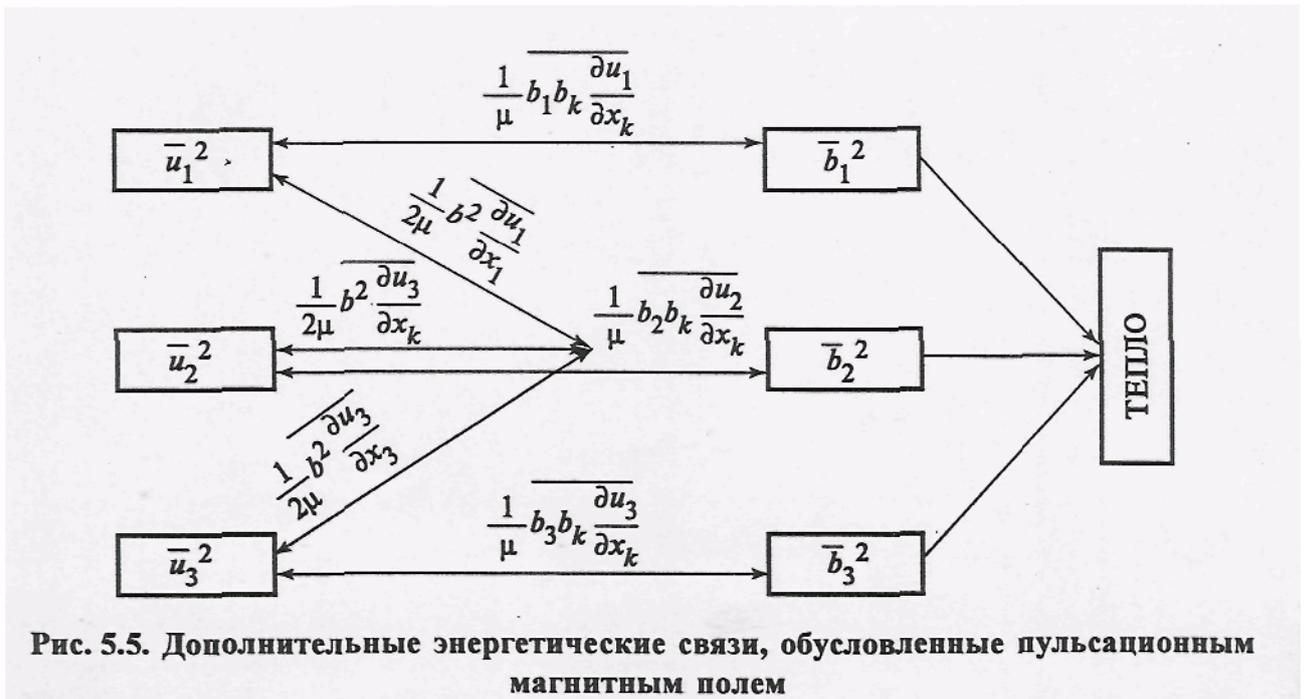


Рис. 5.5. Дополнительные энергетические связи, обусловленные пульсационным магнитным полем

прежде всего работы [16-18], авторы которых, по существу, рассматривают ограниченную в пространстве турбулентную область. Помимо обычно используемой процедуры линеаризации уравнений (отбрасывание нелинейных членов в уравнении движения означает пренебрежение переносом энергии по спектрам) в этих работах осуществляется дальнейшее упрощение исходной системы уравнений. Дополнительные связи, налагаемые граничными условиями, позволяют произвести упрощение, эквивалентное отбрасыванию II и V слагаемых в уравнении (5.13), т.е.

$$p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{B_k}{\mu} b_k \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.19)$$

Так как слагаемые в выражении (5.19) при анизотропной турбулентности не равны нулю, то условие (5.19) означает, что в рассматриваемой модели турбулентный перенос энергии за счет пульсаций магнитного давления происходит в направлении, противоположном переносу энергии за счет пульсаций «обычного» гидродинамического давления, и полностью компенсирует его. Ротта [21] показал, что за счет пульсаций давления энергия переносится от более энергосодержащих компонент пульсаций скорости к менее энергосодержащим. Таким образом, в модели турбулентности, анализируемой в работах [16-18], пульсации магнитного давления переносят энергию от менее энергосодержащих компонент пульсаций скорости к более энергосодержащим компонентам.

Такой характер переноса энергии противоречит обычным физическим представлениям. Более того, воспользовавшись рассуждениями, аналогичными рассуждениям Ротта,

покажем, что в процессе обмена, обусловленного слагаемыми $\frac{B_k}{\mu} b_k \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, энергия

также переносится от более энергосодержащей компоненты к менее энергосодержащим.

Пусть в некоторый момент времени в окрестности произвольно взятой точки O энергия одной из компонент пульсаций скорости существенно больше энергии двух

других компонент, например $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2} \approx \overline{u_3^2}$ и $\partial u_1 / \partial x_1 < 0$, как это показано на рис. 5.6. Из уравнения неразрывности следует, что $\partial u_2 / \partial x_2 \approx \partial u_3 / \partial x_3 > 0$. Так как u_1 существенно больше u_2 и u_3 , то будем учитывать только то пульсационное магнитное поле, которое обусловлено компонентой u_1 . Если приложенное внешнее магнитное поле \mathbf{B} сориентировано в положительном направлении

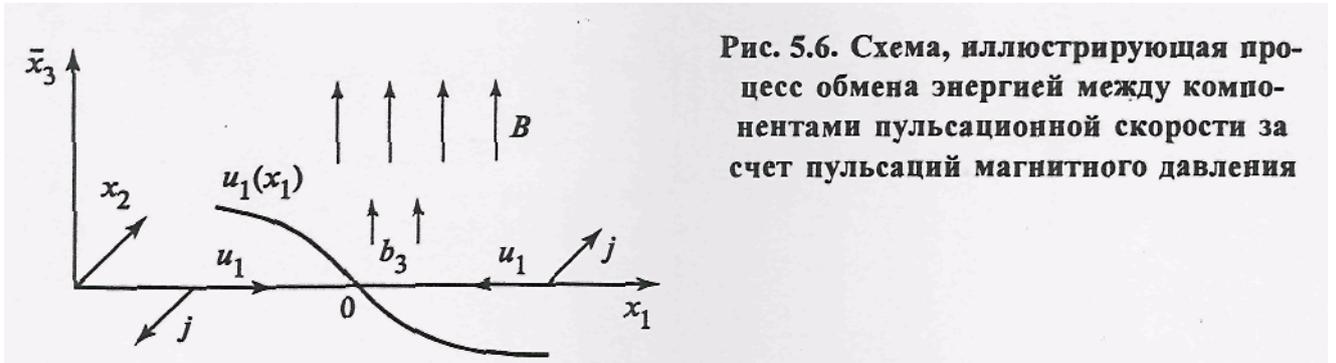


Рис. 5.6. Схема, иллюстрирующая процесс обмена энергией между компонентами пульсационной скорости за счет пульсаций магнитного давления

оси x_3 , то векторы индуцированных токов в окрестности точки O будут лежать в плоскости $x_1 x_2$ (их направление показано на рис. 5.6), а магнитное поле этих токов \mathbf{b} , будет направлено в положительном направлении оси x_3 , т.е. $b_3 > 0$. Таким

образом, $\frac{B_3}{\mu} b_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} < 0$, а $\frac{B_3}{\mu} b_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \approx \frac{B_3}{\mu} b_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} > 0$ В случае $\partial u_1 / \partial x_1 > 0$

получим, что $b_3 < 0$ и знаки приведенных неравенств сохраняются.

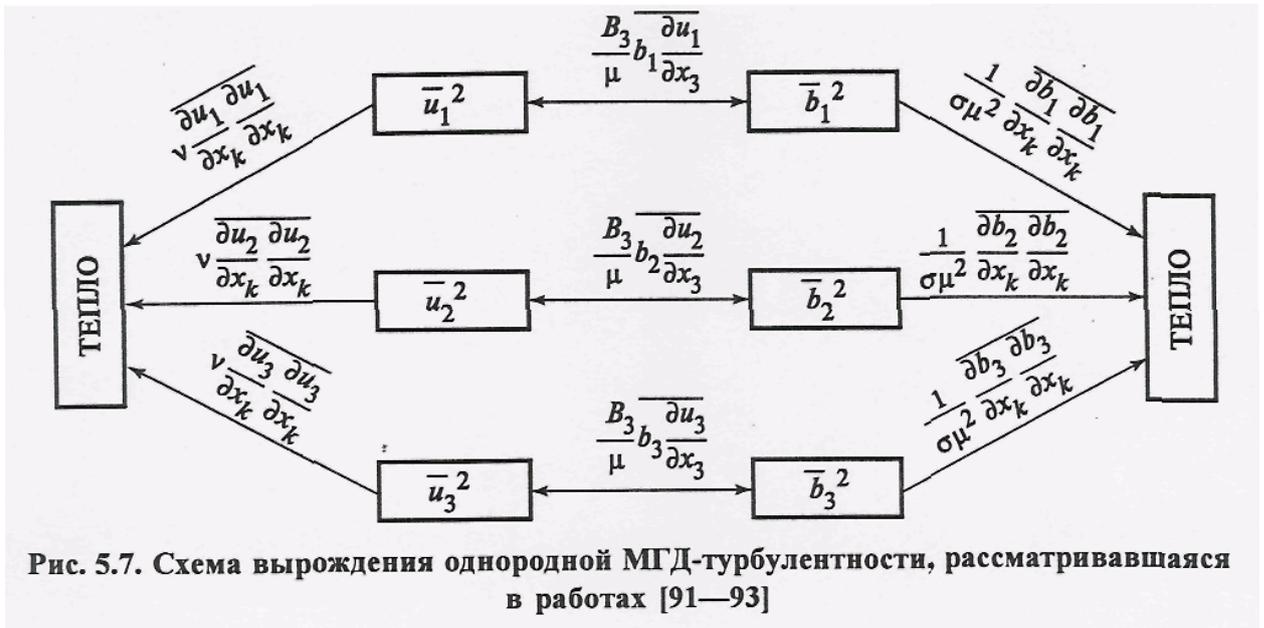
Следовательно, указанные соотношения должны быть верны и для осредненных

величин, т.е. $\frac{B_3}{\mu} \overline{b_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} < 0$, а $\frac{B_3}{\mu} \overline{b_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \approx$

$\frac{B_3}{\mu} \overline{b_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} > 0$. В соответствии с уравнением (5.16) энергия компоненты u_1 при

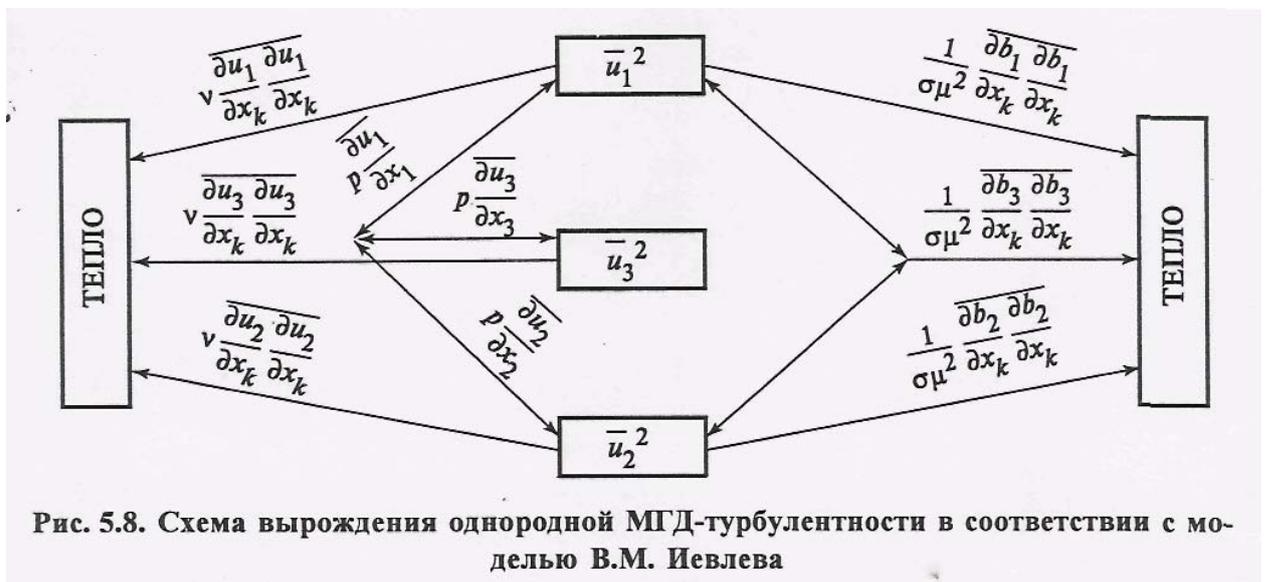
этом убывает, а энергия компонент u_2 и u_3 возрастает, т.е. происходит перенос энергии от более энергосодержащей компоненты к менее энергосодержащим.

Схема энергетического взаимодействия, соответствующая системе уравнений, решавшихся в работах [16-18], изображена на рис. 5.7.



Как следует из этой схемы, влияние магнитного поля на все три компоненты пульсаций скорости в рассматриваемой модели одинаково, и, если исходная турбулентность была изотропной, энергии всех компонент в процессе затухания равны между собой. Такой результат является следствием того, что в отличие от схемы рис. 5.3, в соответствии с которой магнитное поле не взаимодействует непосредственно с продольной компонентой пульсаций скорости u_3 , в рассматриваемой модели магнитное поле подавляет и эту компоненту, так же как и поперечные.

Значительно более физической, на наш взгляд, является модель, рассмотренная В.М. Иевлевым [22]. Так как отношение энергии пульсационного магнитного поля к энергии пульсаций скорости имеет порядок $\mu \sigma^2 B^2 L^2 / \rho$, а эта величина для большинства практических случаев значительно меньше единицы, то В.М. Иевлев предложил пренебречь левой частью уравнения (5.14). При этом слагаемое IV в уравнении (5.13) становится равным джоулевой диссипации энергии (слагаемому VIII) и анализ уравнения (5.13) упрощается. Схема энергетического взаимодействия, соответствующая такой модели, показана на рис. 5.8.



Итак, при вырождении однородной МГД-турбулентности происходят следующие процессы преобразования энергии: обмен энергией между тремя компонентами поля скорости, обмен энергией между полем скорости и пульсационным магнитным полем, вязкая и джоулева диссипация энергии, а также перенос энергии по спектрам, не отражаемый уравнением (5.13). При этом магнитное поле по-разному воздействует на продольную и поперечные компоненты пульсаций скорости. Под воздействием магнитного поля претерпевают изменение и спектры этих компонент.

5.3. Спектры вырождающейся однородной МГД-турбулентности.

Остановимся подробнее на рассмотрении причины и характера воздействия магнитного поля на спектры пульсационных компонент скорости.

Спектральные уравнения вырождающейся однородной МГД-турбулентности имеют следующий вид [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{ii}(\mathbf{k}) = \Gamma_{ii}(\mathbf{k}) + \Pi_{ii}(\mathbf{k}) - 2\nu k^2 F_{ii}(\mathbf{k}) + A_{ii}(\mathbf{k}) + B_{ii}(\mathbf{k}); \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = -A_{ii}(\mathbf{k}) - 2\nu_m k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}). \quad (5.21)$$

Зависимость слагаемых этих уравнений от времени для краткости не указывается.

Уравнение (5.20) отличается от уравнения (3.23) последними двумя слагаемыми, смысл которых будет рассмотрен ниже.

Левые части этих уравнений характеризуют скорость изменения спектральной плотности энергии k -й гармоники поля скорости $F_{ii}(\mathbf{k})$ и энергии пульсационного магнитного поля $\Phi_{ii}(\mathbf{k})$

Слагаемое $\Gamma_{ii}(\mathbf{k})$ при интегрировании по всем волновым числам обращается в ноль. Таким образом, оно связано с процессом, не изменяющим суммарную энергию i -й компоненты скорости, а только перераспределяющим ее по волновому пространству. Этот процесс, отражающий нелинейность уравнения Навье-Стокса, называют переносом энергии по спектру.

Сумма слагаемых $\Pi_u(\mathbf{k})$ обращается в ноль при суммировании по i . Следовательно, эти слагаемые связаны с процессом, не изменяющим суммарной энергии трех компонент скорости, а только перераспределяющим энергию между этими компонентами. Этот процесс обмена энергией между компонентами пульсационной скорости обусловлен пульсациями давления.

Слагаемое $2\nu k^2 F_{ii}(\mathbf{k})$, как это совершенно очевидно, описывает процесс вязкой диссипации энергии поля скорости. Хорошо видно, что основную роль в диссипативном процессе играет высокочастотная часть спектра (большие значения \mathbf{k}).

Слагаемое $A_{ii}(\mathbf{k})$ присутствует в обоих уравнениях (5.20) и (5.21) с разными знаками. Следовательно, оно описывает процесс обмена энергией между соответствующими гармониками поля скорости и пульсационного магнитного поля.

Сумма слагаемых $B_{ii}(\mathbf{k})$, как и $\Pi_{ii}(\mathbf{k})$, при суммировании по i обращается в ноль. Эти слагаемые описывают процесс обмена энергией между тремя компонентами пульсационной скорости за счет пульсаций магнитного давления.

И, наконец, слагаемое $2\nu_m k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k})$ связано с джоулевой диссипацией энергии.

Процесс обмена энергией между пульсационным полем скорости и пульсационным магнитным полем исследовался в работах [16-18]. Несмотря на сравнительно грубые «модели», использовавшиеся авторами этих работ, им удалось установить весьма важный результат, характерный для взаимодействия турбулентности с магнитным полем. Было показано, что обмен энергией между полем скорости и магнитным полем, описываемый в уравнениях (5.20) и (5.21) слагаемым $A_{ii}(\mathbf{k})$, имеет явно выраженную анизотропию. Если ось x_3 совместить с направлением приложенного магнитного поля, то

$$A_{ii}(\mathbf{k}) = -\frac{k_3^2}{k^2} \frac{B_3}{v_m} F_{ii}(\mathbf{k}) - \quad (5.22)$$

Из этого выражения видно, что в процессе обмена основную роль играют гармоники, волновой вектор которых направлен вдоль приложенного магнитного поля.

Для гармоник, перпендикулярных магнитному полю ($k_3 = 0$) $A_{ii}(\mathbf{k}) = 0$, т.е. обмен энергией отсутствует. Таким образом, продольные по отношению к магнитному полю гармоники вырождаются быстрее перпендикулярных. Благодаря этому трехмерные спектры пульсаций скорости при наложении однородного магнитного поля должны вырождаться в двумерные. В физическом пространстве такому поведению спектров в

волновом пространстве соответствует стремление $\frac{\partial \dots}{\partial x_3} \rightarrow 0$, т.е. все параметры

турбулентности перестают зависеть от пространственной координаты, направленной вдоль приложенного магнитного поля, а коэффициенты продольной корреляции увеличиваются, стремясь к бесконечности.

Естественно, что полученные теоретическим путем результаты желательно подтвердить экспериментально. Следует сразу отметить, что получить в лабораторных условиях однородную турбулентность практически невозможно. Во многих экспериментальных работах процесс вырождения МГД-турбулентности исследовался в течениях за решетками, и полученные результаты не применимы к однородной турбулентности. Только в двух известных работах [23,24], в которых турбулентность создавалась в большом баке с жидким металлом путем протаскивания через металл турбулизирующей решетки, генерируемую турбулентность можно было считать более или менее однородной. В работе [23] исследовалось вырождение продольной компоненты, а в работе [24] были измерены как продольные, так и поперечные компоненты пульсаций скорости. Получены данные о влиянии магнитного поля на темп вырождения, на корреляционные функции и спектры. Но получить четкое экспериментальное представление о том, какие из компонент скорости подавляются более интенсивно, не удалось. Результаты опытов свидетельствуют о том, что на протяжении всего процесса вырождения МГД-турбулентность сохраняет трехмерную структуру.

Приложение

Элементы тензорной алгебры

Понятие о тензорах

По сложности математического описания все физические величины можно разделить на группы.

Скалярные величины. Скалярная величина определяется одним численным значением, не зависящим от выбранной системы координат. Скалярами являются: масса, температура, плотность, вязкость и др. В тензорной алгебре скалярная величина является тензором нулевого ранга и обозначается символом без индексов или символом, у которого все индексы немые (см. ниже): $m, T, a_{kk}, \tau_{ll}, \lambda_{jjmm}$ и др.

Вектор. Для задания векторной величины необходимы три числа. Удобнее всего задавать вектор его тремя проекциями на декартовы оси выбранной системы координат (рис.П.1):

$$\vec{A} = A_1 \cdot \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \quad (\text{П.1})$$

где - $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы вдоль осей x_1, x_2, x_3 .

Рис.п.1

В тензорной алгебре вектор является тензором $1^{го}$ ранга и задается в виде A_i , где индекс i принимает значение 1, 2 или 3 в зависимости от того, о какой из проекций рассматриваемого вектора идет речь. Типичными векторными величинами являются: скорость, сила, тепловой поток и др.

Полезно рассмотреть операции скалярного и векторного произведения 2 векторов A и B , угол между которыми равен α .

Скалярное произведение это скаляр, определяемый выражением:

$$\varphi = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha \quad (\text{П.2})$$

Типичным примером является работа силы F на пути dS :

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Если векторы A и B заданы своими проекциями, то

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (\text{П.3})$$

В тензорной алгебре это выражение записывается в виде $A_k B_k$. Здесь используется следующее важное правило тензорной символики: в любом слагаемом тензорного выражения может быть несколько индексов, но каждый индекс может встречаться не более двух раз. Если индекс встречается один раз, то он обозначает какую-либо компоненту тензора. Если индекс встречается два раза, то он называется немым и по немому индексу осуществляется суммирование по все трем осям. В приведенном выше выражении это означает:

$$A_k B_k = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

Векторное произведение двух векторов это вектор, в векторной алгебре записываемый в виде:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad (\text{П.4})$$

Модуль этого вектора равен $C = AB \sin \alpha$. Вектор \vec{C} перпендикулярен векторам \vec{A} и \vec{B} и его направление определяется правилом буравчика (винта) (рис.П.2): если первый множитель – вектор \vec{A} вращать по направлению ко второму множителю – вектору \vec{B} в сторону угла меньшего 180° и рассматривать это вращение как вращение рукоятки буравчика, то направление движения буравчика укажет направление вектора \vec{C} . Следует отметить, что векторное произведение совпадающих по направлению векторов равно нулю.

Если векторы \vec{A} и \vec{B} заданы своими координатами, то

Рис.П.2

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \vec{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \vec{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{k} \quad (\text{П.4})$$

В тензорной алгебре векторное произведение записывается в виде

$$\varepsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (\text{П.5})$$

Здесь ε_{ijk} - единичный тензор 3^{го} ранга, компоненты которого определяются так:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} = 0, & \text{если среди индексов } i, j, k \text{ есть одинаковые;} \\ = 1, & \text{если все индексы разные и их последовательность – правовинтовая;} \\ = -1, & \text{если все индексы разные и их последовательность – левовинтовая} \end{cases}$$

Таким образом, отличны от нуля только 6 компонент этого тензора:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1; \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$$

Выражение (П.5) определяет любую из 3 компонент вектора \vec{C} , например

$$C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

Тензор 2^{го} ранга задается 9 числами и обозначается символом с двумя различными индексами A_{ij} , каждый из этих индексов может принимать значения 1, 2 или 3.

Для задания тензора 3^{го} ранга необходимо 27 чисел. Эту цепочку при необходимости можно продолжить и для задания тензора n-ого ранга необходимо 3ⁿ чисел.

Остановимся более подробно на тензорах 2^{го} ранга, так как они играют важную роль в механике жидкости и газа.

Типичным тензором тензора 2^{го} ранга является величина, определяющая напряженное состояние жидкой (или твердой) частицы (рис.П.3):

Рис.П.3

На все грани частицы со стороны отброшенной жидкости действуют силы. Силы, действующие на противоположные грани противоположны по направлению и отличаются на дифференциально малую величину. Поэтому при анализе напряженного состояния частицы рассматривают 3 силы: \vec{T}_1, \vec{T}_2 и \vec{T}_3 (рис.П.4)

Рис.П.5

Каждую из этих сил можно разложить на три проекции:

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \{T_{11} \ T_{12} \ T_{13}\} \\ \vec{T}_2 &= \{T_{21} \ T_{22} \ T_{23}\} \\ \vec{T}_3 &= \{T_{31} \ T_{32} \ T_{33}\} \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Первый индекс у компоненты означает направление оси, совпадающей с нормалью к площадке, к которой приложена сила, второй – ось, на которую проектируется эта сила. Все 9 компонент, определяющих напряженное состояние частицы, можно записать в виде матрицы, представляющей собой тензор второго ранга – тензор напряжений:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{П.7})$$

При тензорной записи этот тензор записывается в виде T_{ij} , где T_{ij} – любая из 9 компонент тензора напряжений.

Тензор называется симметричным, если $T_{ij} = T_{ji}$ и в этом случае определяется 6 компонентами. Тензор называется антисимметричным, если $T_{ij} = -T_{ji}$ и в этом случае определяется всего 3 компонентами, так как $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$.

Любой тензор можно разложить на симметричный и антисимметричный в соответствии с тождеством:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \quad (\text{П.8})$$

симметр. антисим.

Многие тензоры 2^{го} ранга, используемые в механике жидкости и газа, обладают свойством симметрии. Рассмотрим некоторые свойства симметричных тензоров. Примером такого тензора является тензор напряжений:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{П.9})$$

1). При любом вращении системы координат симметричный тензор остается симметричным.

2). Свертка тензора:

$$\mathfrak{I} = \tau_{jj} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \quad (\text{П.10})$$

инвариантна по отношению к любому вращению системы координат.

3) Существует по крайней мере одна система координат, называемая главными осями симметричного тензора 2^{го} ранга, в которой тензор имеет вид:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_I & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{III} \end{pmatrix} \quad (\text{П.11})$$

Если при этом $\tau_I \neq \tau_{II} \neq \tau_{III}$, то такая система координат $\{x_I, x_{II}, x_{III}\}$ является единственной. Если $\tau_I \neq \tau_{II} = \tau_{III}$, то положение только одной оси x_I – фиксировано. Если $\tau_I = \tau_{II} = \tau_{III}$, то любая система осей будет системой главных осей. Примером такого тензора является « δ - Кронекера»:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \quad (\text{П.12})$$

Запишем некоторые важные для механики жидкости и газа выражения:

Уравнение движения (уравнение Навье-Стокса) для несжимаемой жидкости:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (\text{П.13})$$

Компоненты тензора вязких напряжений:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (\text{П.14})$$

Градиент давления ($grad p$)_i = $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ (П.15)

Дивергенция вектора скорости: $div \vec{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ (П.16)

Ротор вектора скорости: $(rot \vec{u})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ (П.17)

Список литературы

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Часть 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Часть 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
3. Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963, 680 с.
4. Брэдшоу П. Введение в турбулентность и ее измерения. М.: Мир, 1974, 280 с.
5. Рейнольдс А.Д. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979. 408 с.
6. Ибрагимов М.Х., Субботин В.И. и др. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. М.: Атомиздат, 1978. 296 с.
7. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 346 с.
8. Бендатт Д., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983. 312 с.
9. Бендатт Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 465 с.
10. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1. М.: Мир 1971. 317 с.
11. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 2. М.: Мир 1972. 288 с.
12. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.
13. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Иностран. лит. 1963. 312 с.
14. Келлер Л.В., Фридман А.А. Differentialgleichung fur die turbulente Bewegung einer Kompressiblen Flussigkeit. Proc. Intern. Congr. Appl. Mech. 1924. p. 395-405.
15. Обухов А.М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР. Сер.геогр. и геофиз.. 1949. Т.13. № 1. С.58-69.
16. Lehnert B. The decay of magneto-turbulence in the presence of a magnetic field and coriolis forse. Quart. Appl.Math. 1955. Vol. 12. N 4. p. 321-341.
17. Deissler R.B. Magneto-fluid dynamic turbulence with an uniform imposed magnetic field. Phis/ Fluids. 1963. Vol.6. N 9. p. 1250-1259.
18. Moffat H.K. On the suppression of turbulence by an uniform magnetic field. J.Fluid Mech. 1967. Volo.28.N 3. p. 571-592.
19. Генин Л.Г., Манча С.П., Свиридов В.Г. Вырождение однородной МГД-турбулентности. Магнитная гидродинамика. 1974. № 2. с. 87.
20. Цинобер А.Б. Магнитогидродинамическая турбулентность. Магнитная гидродинамика. 1975. № 1. с. 7.
21. Rotta J. Styatistische Theorie nichthomodern Turbulenze. Ztschr. Phys. 1951. Vol. 129. N 5. p. 547-572.
22. Иевлев В.М. О влиянии магнитного поля на характеристики однородной турбулентности. IV Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Сб. тез. Рига, 1964.
23. Alemany A., Moreau R., Sulem.P.L., Frish U. Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD-turbulence. J. De Mecanique. 1979. Vol. 18.N 2. p. 277-313.
24. Ворончихин В.А., Генин Л.Г., Левин В.Б., Свиридов В.Г. Экспериментальное исследование затухания решеточной турбулентности в однородном магнитном поле. Магнитная гидродинамика. 1985. № 4. с. 131-134.

Содержание

| | |
|--|--|
| ПРЕДИСЛОВИЕ | |
| 1 СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ | |
| 1.1. | Определение турбулентности |
| 1.2. | Случайное турбулентное поле и его свойства |
| 1.2.1. | Плотность вероятности |
| 1.2.2. | Стационарные, однородные, изотропные поля |
| 1.2.3. | Способы осреднения. Понятие об эргодичности |
| 1.3. | Моменты случайного скалярного поля..... |
| 1.3.1. | Математическое ожидание (среднее значение) |
| 1.3.2. | Средний квадрат |
| 1.3.3. | Дисперсии |
| 1.3.4. | Коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса |
| 1.4. | Корреляционная функция |
| 1.4.1. | Автокорреляционная функция |
| 1.4.2. | Коэффициент автокорреляции и временные масштабы |
| 1.4.3. | Пространственная корреляционная функция скалярного поля |
| 1.5. | Моменты случайного векторного поля |
| 1.5.1. | Одноточечные моменты поля скорости |
| 1.5.2. | Корреляционные функции поля турбулентных пульсаций скорости |
| 1.6. | Нормальный (гауссов) закон распределения |
| 1.7. | Гипотеза Тэйлора о «замороженной» турбулентности |
| 2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ И СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ | |
| 2.1. | Разложение в ряд Фурье детерминированных сигналов |
| 2.2. | Спектральный анализ случайного стационарного процесса |
| 2.2.1. | Спектральное представление стационарных случайных процессов |
| 2.2.2. | Свойства комплексных амплитуд. Временные спектры |
| 2.2.3. | Свойства временных спектров. Теорема Винера-Хинчина |
| 2.2.4. | Частотные спектры и временные масштабы |
| 2.3. | Спектры однородных случайных полей |
| 2.3.1. | Спектры однородного скалярного поля |
| 2.3.2. | Спектры однородного векторного поля |
| 3. ДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ | |
| 3.1. | Осредненные уравнения турбулентного движения |
| 3.2. | Уравнения динамики моментов второго порядка поля скорости (уравнения баланса энергии) |
| 3.2.1. | Баланс полной энергии турбулентности |
| 3.2.2. | Баланс энергии осредненного движения |
| 3.2.3. | Баланс энергии пульсационного движения |
| 3.3. | Уравнение баланса «энергии» температурных пульсаций |
| 3.4. | Динамическое уравнение для корреляционных функций |
| 3.5. | Динамическое уравнение для спектральных функций |
| 3.5.1. | Динамическое уравнение пространственной корреляции скорости |
| 3.5.2. | Динамическое уравнение спектральной функции |
| 3.6. | Краткие сведения о спектрах изотропной турбулентности. |
| 3.6.1. | Перенос энергии по спектру. Каскадная модель Ричардсона..... |
| 3.6.2. | Гипотеза Колмогорова. Локальная однородность и локальная изотропия..... |

| | |
|---|--|
| 4. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ... | |
| 4.1. Постановка задачи о существовании статистических характеристик случайных процессов | |
| 4.2. Структура измерительной системы | |
| 4.3. Оценки и их свойства | |
| 4.4. Оценивание математического ожидания | |
| 4.5. Оценивание спектральной плотности | |
| 5. ВЫРОЖДЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТИ | |
| 5.1. Общие положения | |
| 5.2. Анализ вырождения однородной МГД-турбулентности методом энергетического баланса | |
| 5.3. Спектры вырождающейся однородной МГД-турбулентности | |
| 6. ПРИЛОЖЕНИЕ. Элементы тензорной алгебры | |
| ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА | |